Modélisation Géométrique des Solides: Représentations par frontières

Stefka GUEORGUIEVA
stefka.gueorguieva@labri.fr

Plan

BRepr : Notions de base

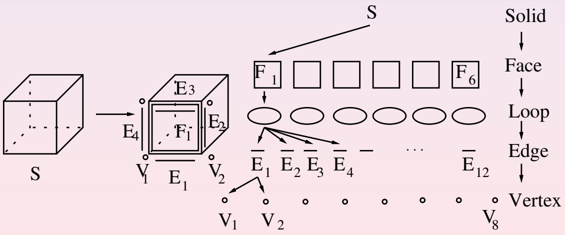
Représentations par frontières

Une représentation est dite représentations par frontières, **Boundary Representation**, ssi est fondée sur la description de la subdivision de la surface frontière des solides en cellules de dimension $0D$, **les sommets**, $1D$, **les arêtes**, et $2D$, **les faces**, et son plongement dans l'espace E^3.

BRepr : Notions de base

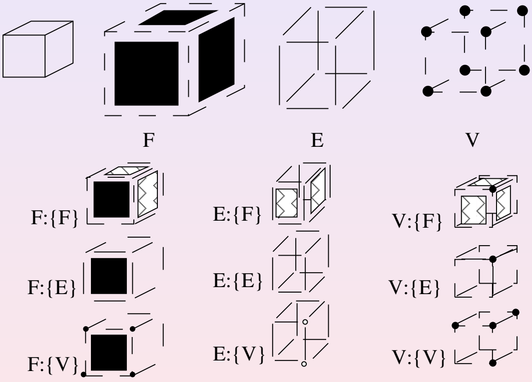
Représentations par frontières

Une représentation est dite représentations par frontières, **Boundary Representation**, ssi est fondée sur la description de la subdivision de la surface frontière des solides en cellules de dimension $0D$, **les sommets**, $1D$, **les arêtes**, et $2D$, **les faces**, et son plongement dans l'espace E^3.



BRepr

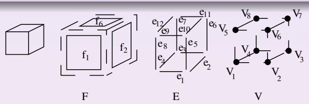
BRepr : Notions de base

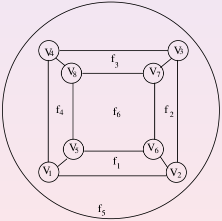


BRepr : description à l'aide des graphes planaires

Description à l'aide des graphes planaires : $G = \{V, E\}$

Représentation **BRepr** basée sur le graphe Sommets-Arêtes

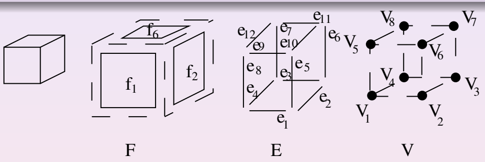


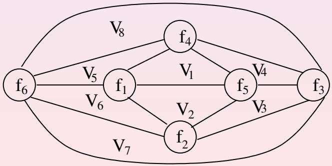


BRepr : description à l'aide des graphes planaires

Description à l'aide des graphes planaires : $G = \{F, E\}$

Représentation **BRepr** basée sur le graphe Faces-Arêtes





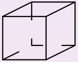
Formule et opérateurs d'Euler

Formule d'Euler

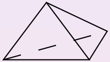
- Ensembles de sommets **V** (Vertices) , d'arêtes **E** (Edges) et de faces **F** (Faces).
- V - E + F = 2
- Polyèdres simples topologiquement corrects $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ V - E + F = 2
- V - E + F = 2 $\not\Longrightarrow$ polyèdres simples topologiquement corrects

Formule et opérateurs d'Euler

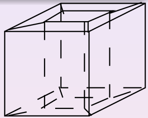
Formule d'Euler pour polyèdres simples



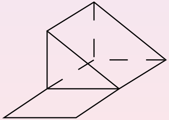
a



b



c



d

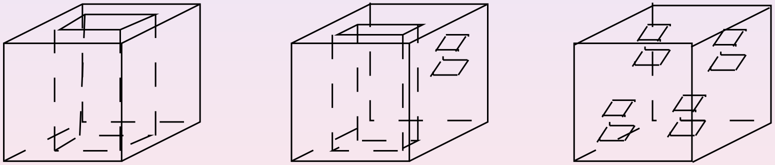
Formule et opérateurs d'Euler

Formule d'Euler-Poincaré

- Ensembles de coquilles **S** (Shells), de trous **H** (Holes) et d'anneaux dans les faces **R** (Rings).
- $V - E + F = 2(S - H) + R$
- Polyèdres topologiquement corrects $\Rightarrow$
  $\Rightarrow V - E + F = 2(S - H) + R$
- $V - E + F = 2(S - H) + R \not\Longrightarrow$ polyèdres topologiquement corrects

Formule et opérateurs d'Euler

Formule d'Euler-Poincaré

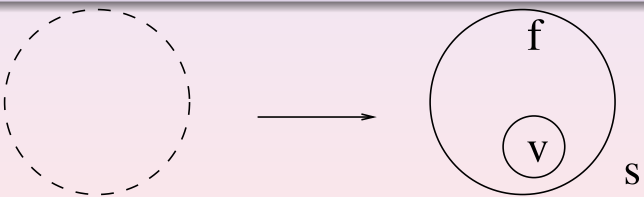


a b c

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Modèle planaire squelettique.
Primitive squelettique constituée par une coquille **s**, une face **f** et un sommet **v**.



Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

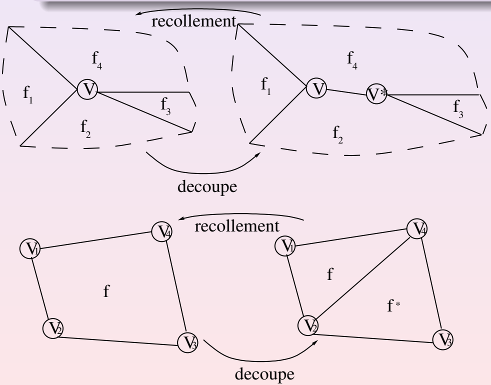
Opérations topologiques locales :

- Découpe et recollement de sommets
- Découpe et recollement de faces

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Découpe et recollement



Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

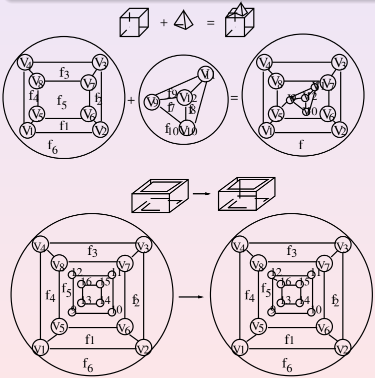
Opérations topologiques globales :

- Somme connexe
- Différence connexe

Formule et opérateurs d'Euler

Manipulations des graphes planaires

Somme et différence



BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

On considère un espace discret de six dimensions où les axes correspondent aux nombres de sommets (V), d'arêtes (E), de faces (F), de trous (H), d'anneaux (R) et de coquilles (S).

Soit un point **P=P(v, e, f, h, r, s)** de cet espace.

Si **P** correspond à un polyèdre topologiquement correct il doit vérifier la formule d'Euler-Poincré.

$V - E + F = 2(S - H) + R$

Cette équation définit un sous-espace de dimension cinq, un hyper plan qui contient tous les polyèdres topologiquement corrects.

BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

Sur ce plan on peut choisir une base de cinq vecteurs V_i, $i = 1, \ldots, 5$, de telle sorte que :

1. V_i soient colinéaires au plan et
2. V_i soient linéairement indépendants.

Une telle base est définie par les opérateurs d'Euler :

V_1= Mev(1, 1, 0, 0, 0, 0)
V_2= Mef(0, 1, 1, 0, 0, 0)
V_3= Mvfs(1, 0, 1, 0 , 0, 1)
V_4= KeMr(0,-1, 0, 0, 1, 0)
V_5= KfMrh(0 , 0,-1, 1, 1, 0)

BRepr : Validité

Construction des représentations BRepr valides

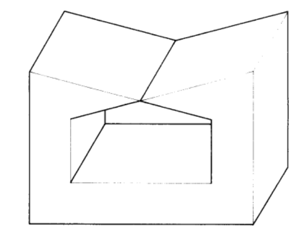
Tout point sur le plan peut être exprimé comme une combinaison linéaire de la base.

En d'autre termes **tout polyèdre topologiquement correct** peut être construit comme **une suite d'opérateurs d'Euler** et la représentation **BRepr** sous-jacente sera valide.

BRepr : Non-ambiguïté

BRepr avec deux arêtes différentes ayant un plongement géométrique identique

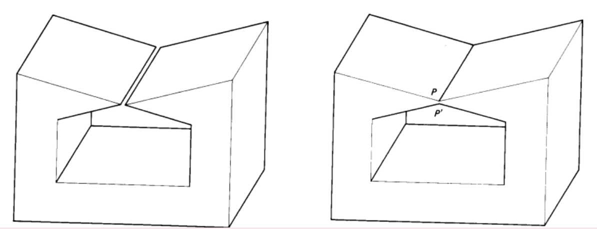
Fig. 4, Ch.Hoffmann et al., "Geometric ambiguities in boundary representations", CAD, V 19, Issue 3, April 1987, Pages 141-147



BRepr : Non-ambiguïté

Deux BReprs correspondant à ce plongement

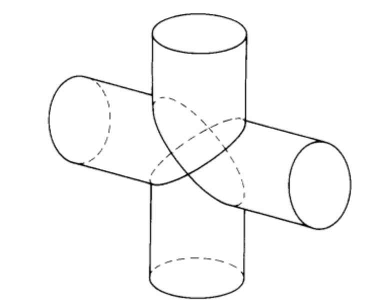
Fig. 5, Ch.Hoffmann et al.



BRepr : Non-ambiguïté

BRepr de surfaces : l'intersection de deux faces n'est pas connexe

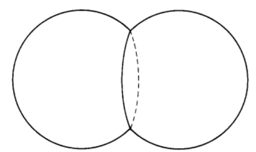
Fig. 3, Ch.Hoffmann et al.

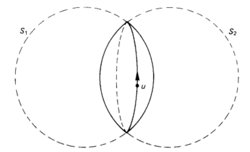


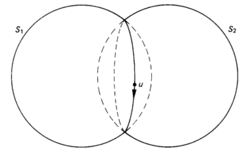
BRepr : Non-ambiguïté

BRepr de surfaces : l'intersection de deux faces est une courbe fermée sans orientation intrinsèque

Fig.2,7,8, Ch.Hoffmann et al.







BRepr : Fermeture

Manipulations des BReprs : Opérateurs d'Euler

- **M**ake, **K**ill
- **v**ertex, **e**dge, **f**ace, **s**hell, **h**ole, **r**ings.

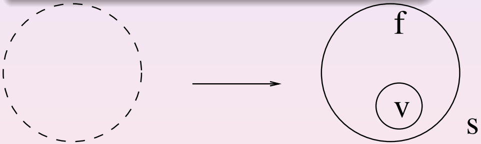
BRepr : Fermeture

Graphes planaires	Représentations BRepr
Manipulations des graphes planaires	Opérateurs d'Euler
Modèle planaire squeletique	Mvfs
Opérations topologiques locales	
Découpe de sommets	Mev
Recollement de sommets	Kev
Découpe de faces	Mef
Recollement de faces	Kef
	KeMr
Opérations topologiques globales	
Somme connexe	KfMrh
Différence connexe	MfKrh

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

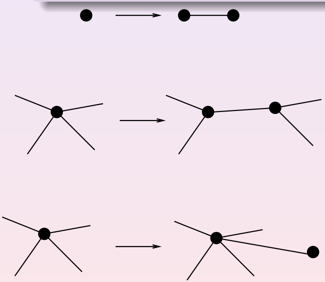
Mvfs : Make vertex, face and shell



BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

Mev : Make edge vertex

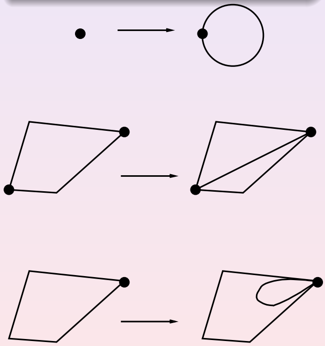


Mev

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

Mef : Make edge face

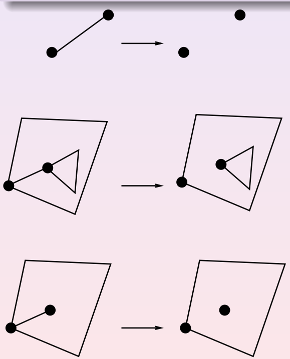


Mef

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

KeMr : Kill edge Make ring

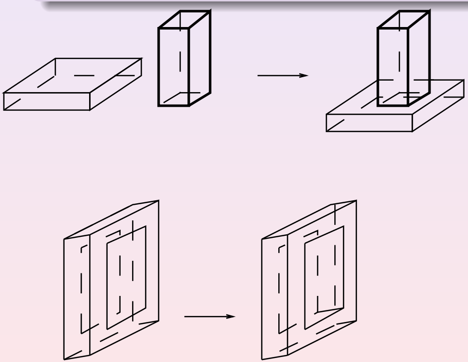


KeMr

BRepr : Description

Opérateurs d'Euler

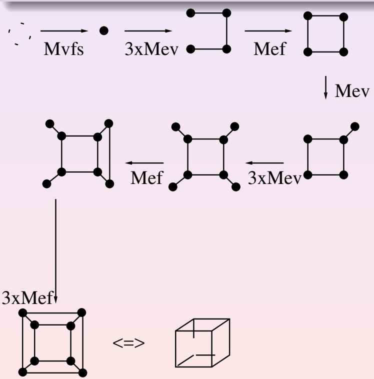
KfMrh : Kill face Make ring hole



KfMrh

BRepr : Description

Construction d'un cube à l'aide des opérateurs d'Euler



BRepr : Description

Opérateurs d'Euler et leurs inverses

	v	e	f	h	r	s
Mev	1	1	0	0	0	0
Mef	0	1	1	0	0	0
Mvfs	1	0	1	0	0	1
KeMr	0	-1	0	0	1	0
KfMrh	0	0	-1	1	1	0

	v	e	f	h	r	s
Kev	-1	-1	0	0	0	0
Kef	0	-1	-1	0	0	0
Kvfs	-1	0	-1	0	0	-1
MeKr	0	1	0	0	-1	0
MfKrh	0	0	1	-1	-1	0

BRepr : Densité

Evaluation de la construction des représentations BRepr valides.

Soit **B** la représentation **BRepr** d'un polyèdre **P** topologiquement correct.
B= B(Mev's, Mef's, Mvfs's, KeMr's, KfMrh's)
P= P(v, e, f, h, r, s)

Soit la matrice **M**=

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Pour évaluer le nombre d'opérateurs d'Euler nécessaires à la construction de **B** il suffit de calculer : $[\mathrm{v\ e\ f\ h\ r\ s}] \times M^{-1}$

BRepr : Densité

Exemple

Pour un polyèdre P(v, e, f, h, r, 1) on obtient :
[v e f h r 1]$\times M^{-1}$ =[v-1 f+h-1 1 h r-h]^T

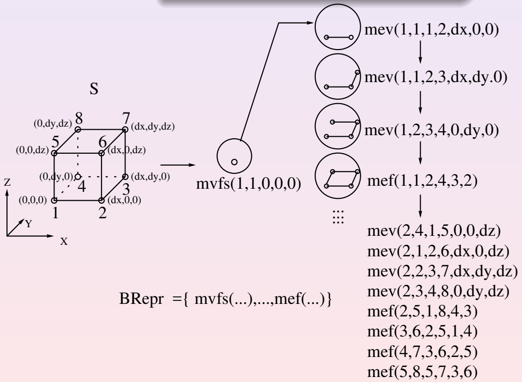
Mev	Mef	Mvfs	KfMrh	KeMr
v-1	f+h-1	1	h	r-h

Pour la construction d'un cube **C**(8,12,6,0,0,1) on a
[8 12 6 0 0 1] $\times M^{-1}$ = [7 5 1 0 0]^T

BRepr : Facilité d'usage

breprPrimitives.dat

1 0.0 0.0 0.0 1



Pour approfondir

- Ian Stroud, "Boundary representation modelling techniques", Springer 2006, ISBN 978-1-84628-312-3, pp. I-XIX, 1-787