

LOGIQUE, INF 462

Examen du 19/12/2008

Sujet de M. Sénizergues ; tous documents autorisés ; durée conseillée : 1h 30.

Exercice 4 (sur 4 points)

Donner des preuves dans LK des séquents :

$$S_1 : \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\exists xP(x)) \wedge (\exists xQ(x))$$

$$S_2 : \forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall xP(x)) \wedge (\forall xQ(x))$$

Exercice 5 (sur 2 points)

On considère l'arbre de séquents suivant, où \mathbf{ax}' désigne un axiome suivi d'un affaiblissement :

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{P(x) \vdash P(x), Q(x)}{\mathbf{ax}'}}{Q(x) \vdash P(x), Q(x)}{?}}{P(x) \vee Q(x) \vdash P(x), Q(x)}{?}}{\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash P(x), Q(x)}{?}}{\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall xP(x)), Q(x)}{?}}{\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall xP(x)), (\forall xQ(x))}{?}}{\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x))}{?}}$$

1- S'agit-il d'une preuve dans LK ? Si oui, préciser quelle règle est utilisée à chaque noeud ; si non, préciser quel noeud ne correspond à aucune règle.

2- Existe-t-il des exemples de prédicats P et Q tels que le séquent $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash (\forall xP(x)) \vee (\forall xQ(x))$ ne soit pas valide ?

Exercice 6 (sur 4 points)

Deux propositions A et B sont *équivalentes* dans LJ (notation $A \equiv_{\text{LJ}} B$) si les séquents $A \vdash B$ et $B \vdash A$ y sont dérivables. Montrer les équivalences suivantes :

$$(A \wedge B) \rightarrow C \equiv_{\text{LJ}} A \rightarrow (B \rightarrow C), \tag{1}$$

$$A \rightarrow (B \wedge C) \equiv_{\text{LJ}} (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C). \tag{2}$$

En déduire l'équivalence suivante :

$$A \rightarrow (B \rightarrow (C \wedge D)) \equiv_{\text{LJ}} ((A \wedge B) \rightarrow C) \wedge ((A \wedge B) \rightarrow D). \tag{3}$$

En construisant une structure de Kripke bien choisie, montrer que l'équivalence suivante n'est pas vraie :

$$[A \rightarrow (B \vee C)] \equiv_{\text{LJ}} [(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)] \tag{4}$$