Les fonctions de parking, vues comme des tas de sable.

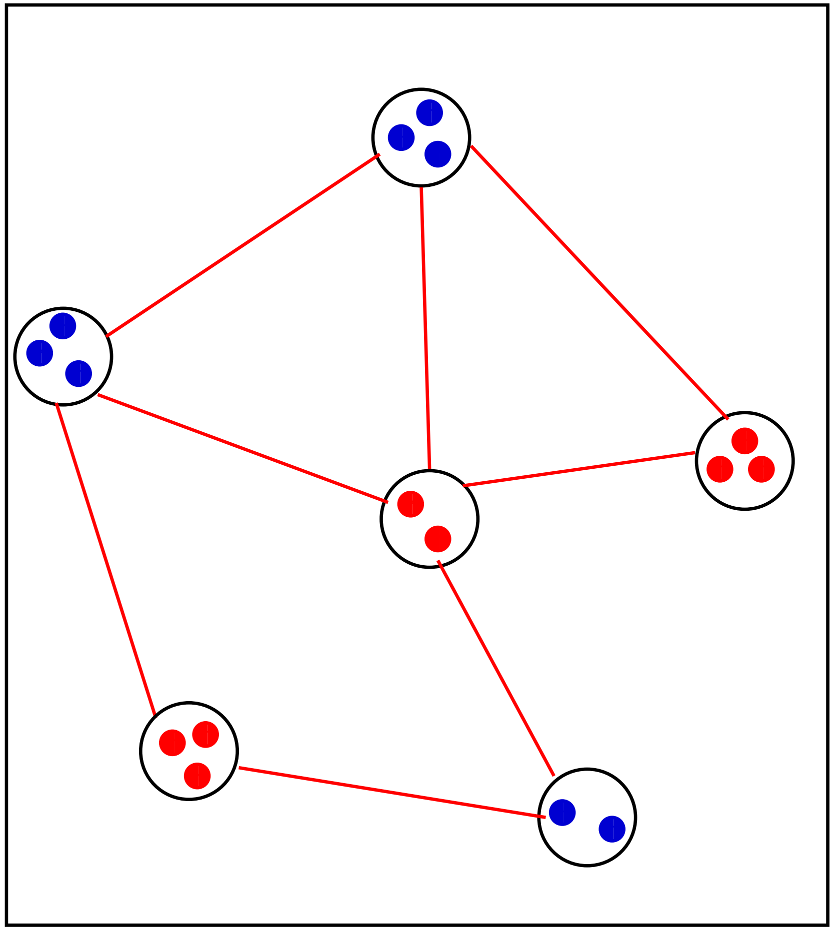
Robert Cori
Labri, Université Bordeaux 1

Dédié à Dominique Poulalhon

Tas de sables bicolores

- Un graphe connexe $G = (X, E)$
- Chaque sommet contient des grains bleus ou des grains rouges.
- Le nombre total de grains bleus est égal à celui des grains rouges.
- Il se produit des éboulements.

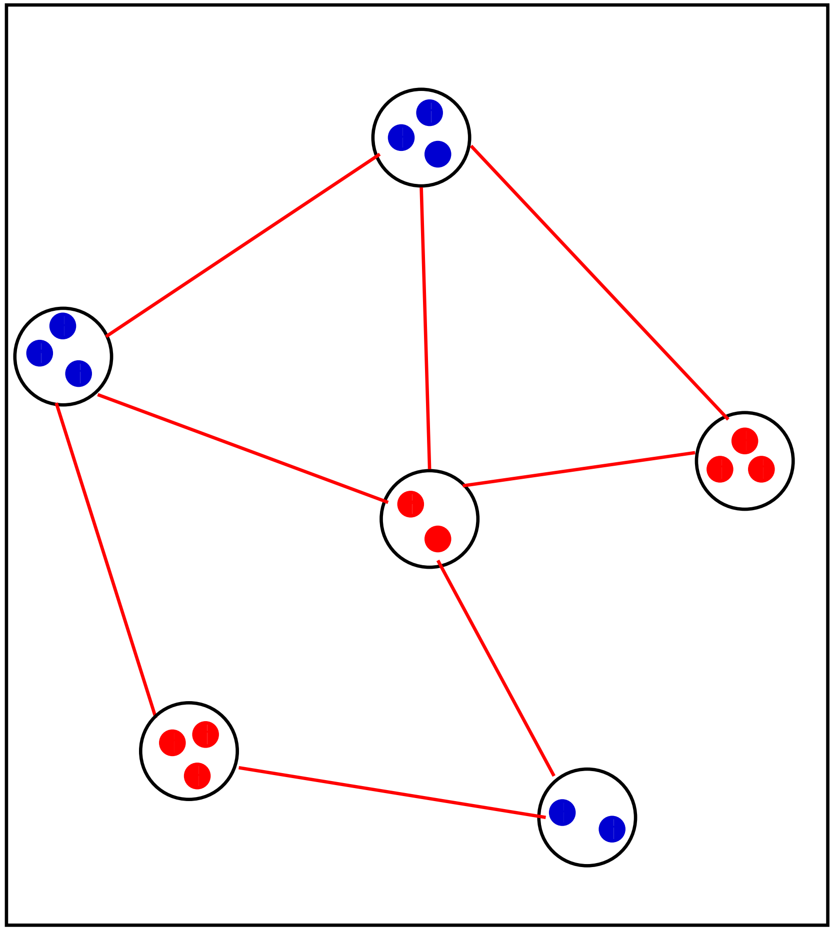
Exemple



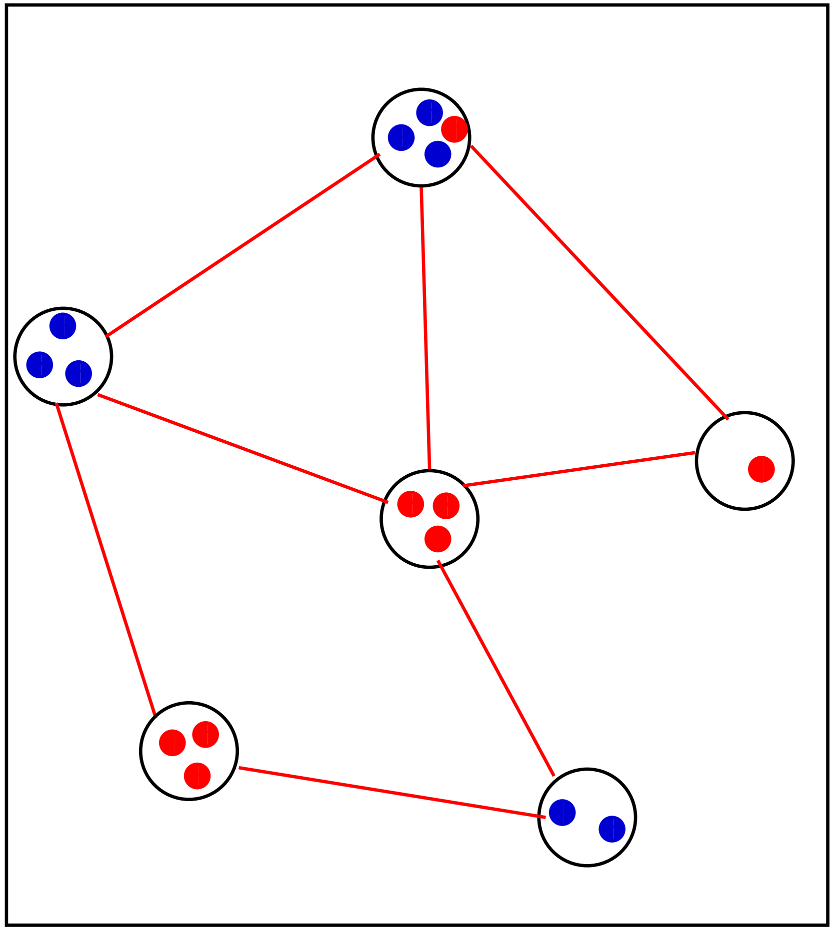
Règle d'éboulement

- Un sommet peut s'ébouler s'il contient un nombre de brins supérieur ou égal à son degré d_i
- Le sommet x_i perd d_i grains
- Les sommets voisins de x_i gagnent chacun un des grains de x_i.
- Deux grains de couleurs différentes sur un même sommet se détruisent

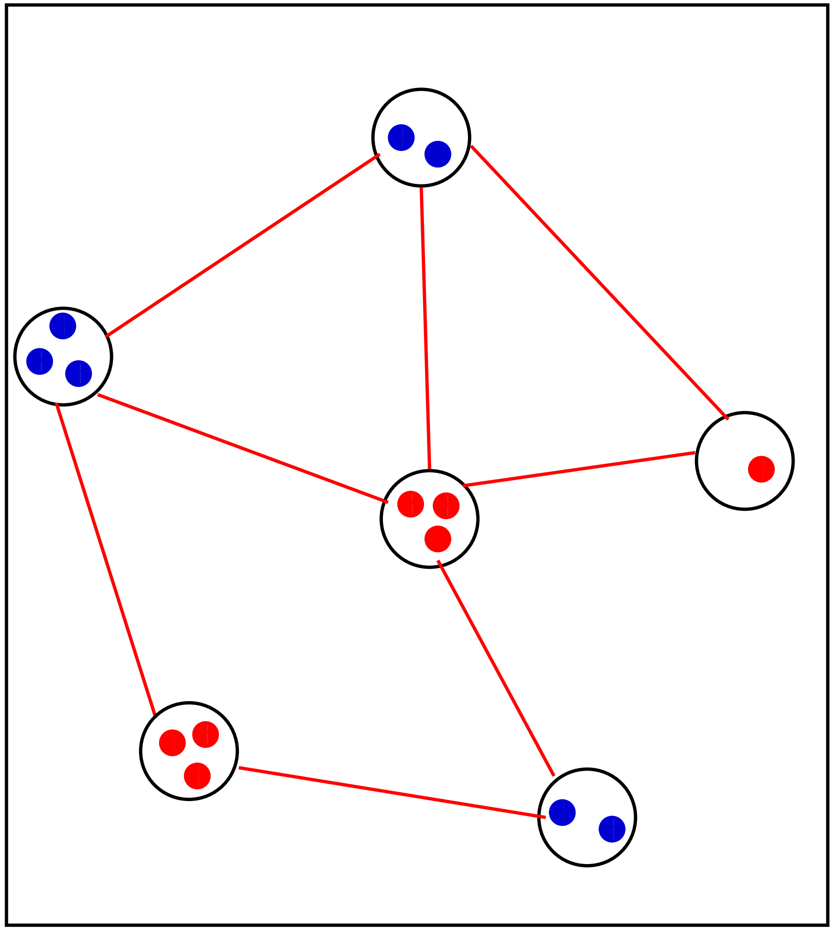
Exemple



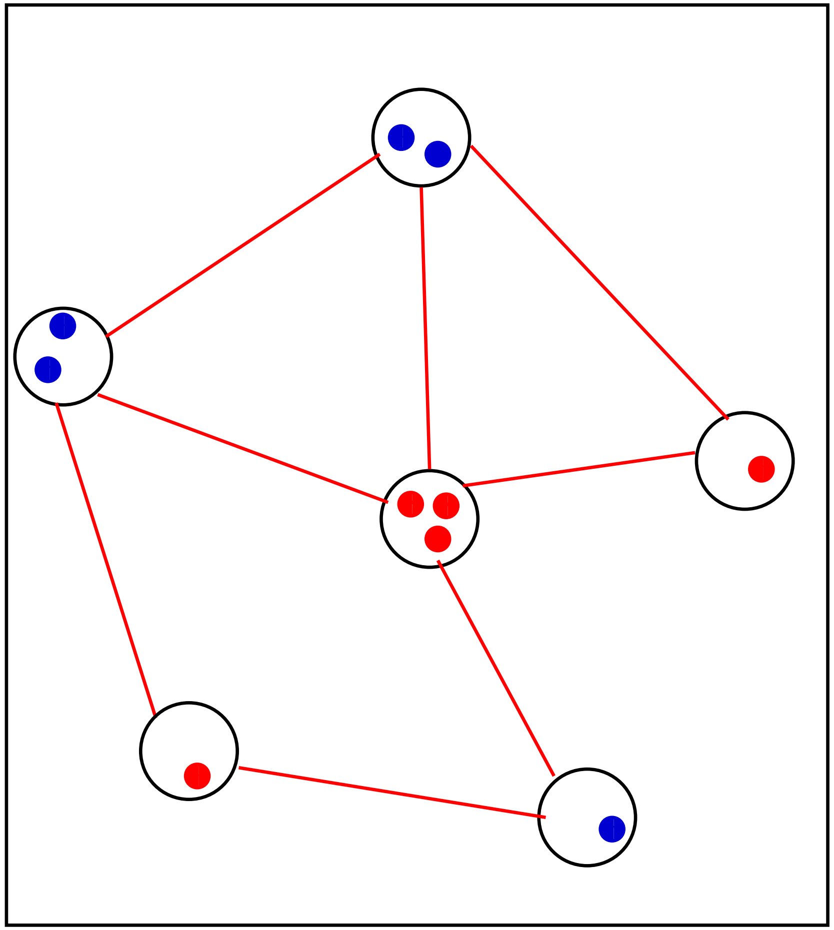
Exemple



Exemple

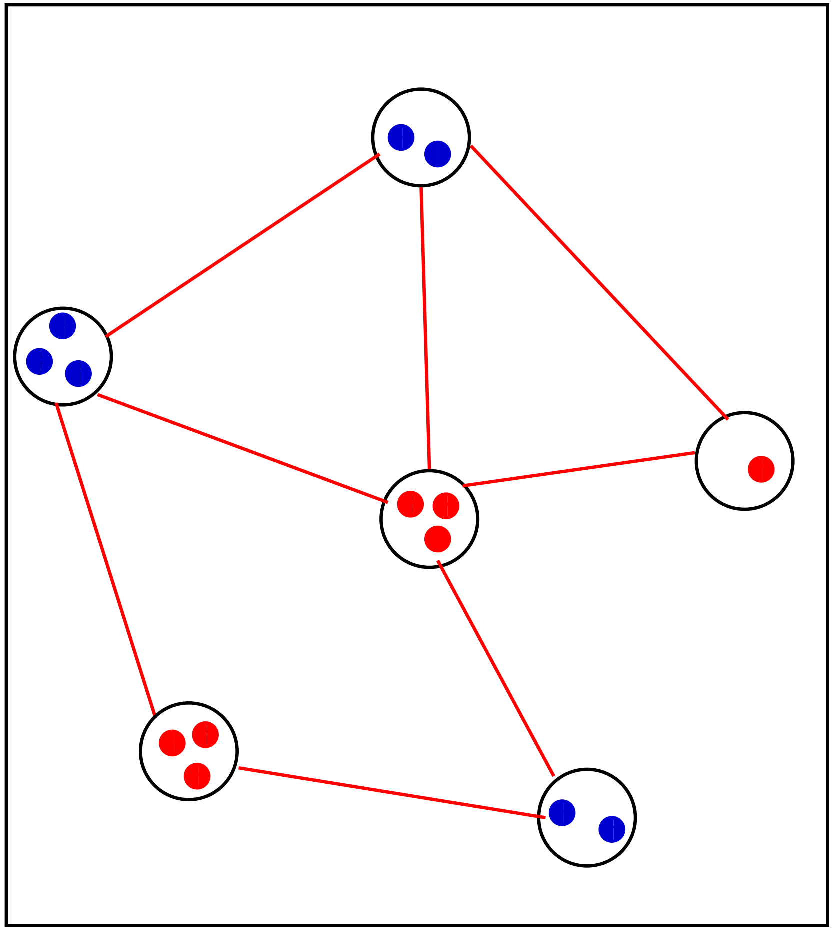


Exemple

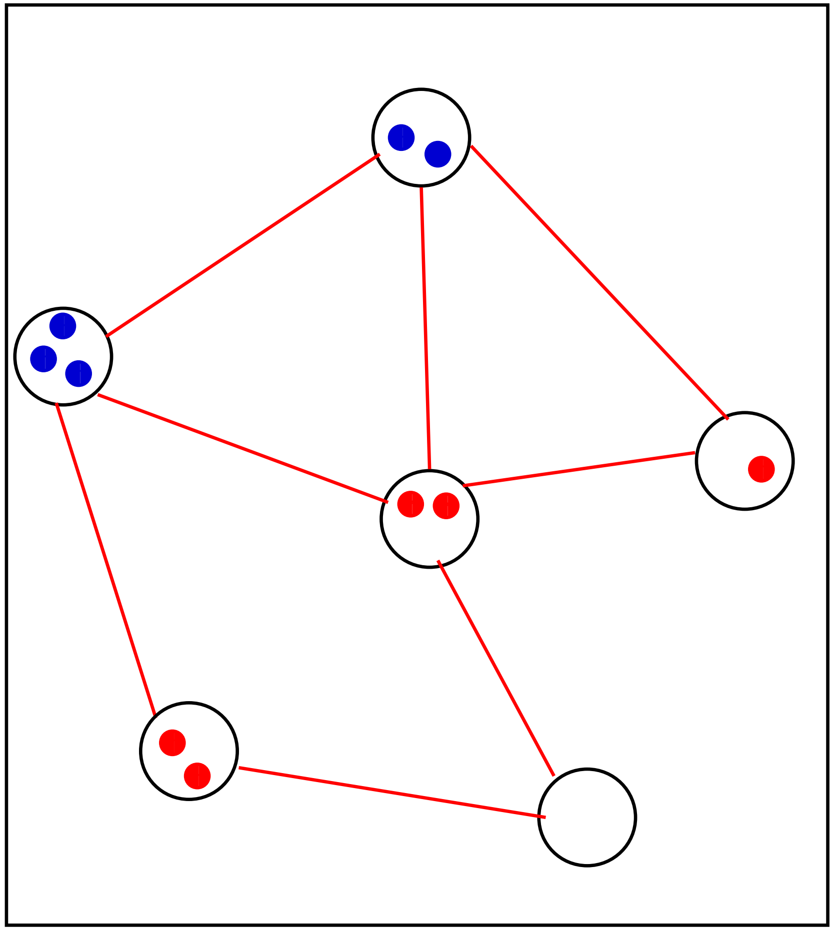


Le résultat peut dépendre de l'ordre dans lequel sont effectués les éboulements

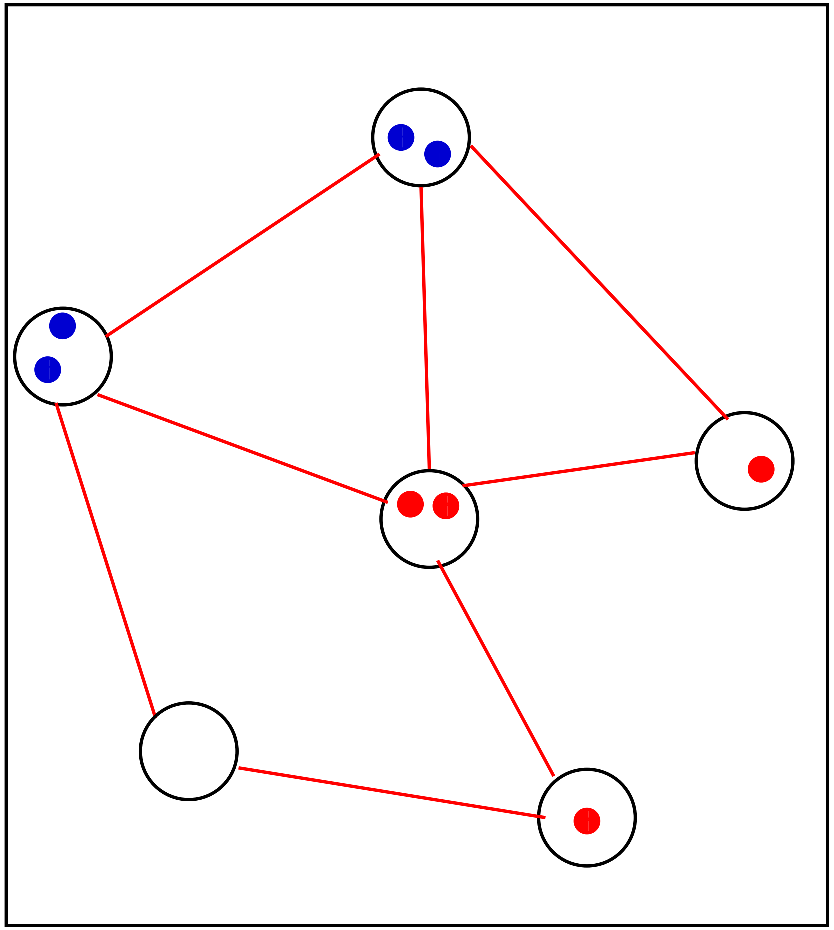
Exemple



Exemple

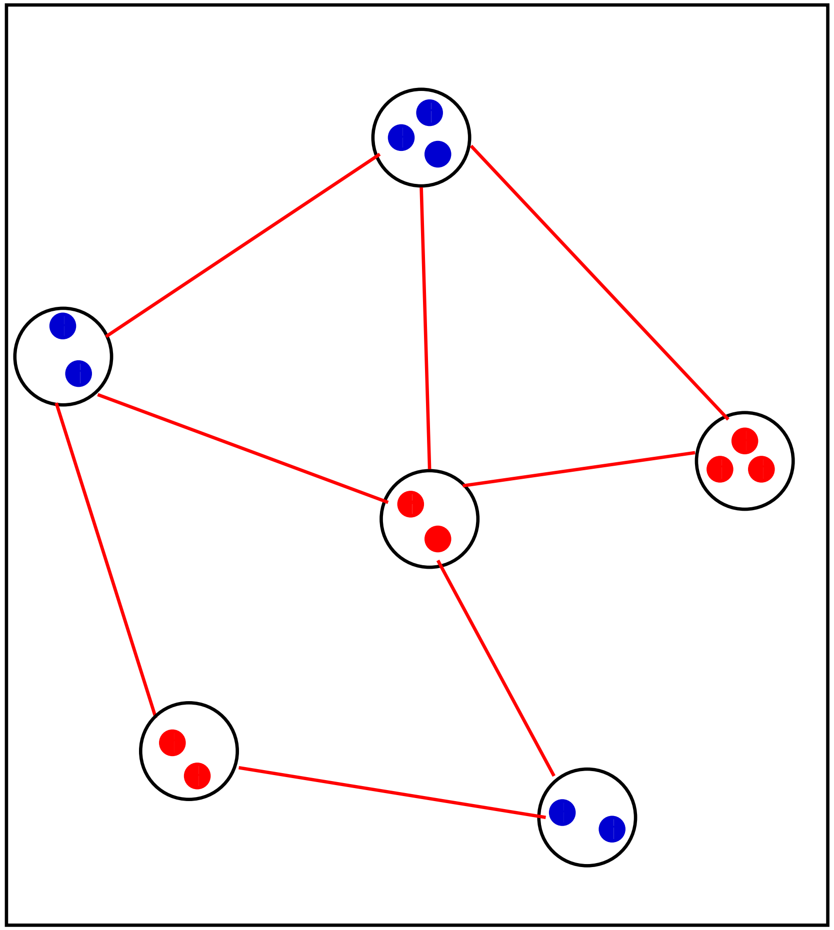


Exemple

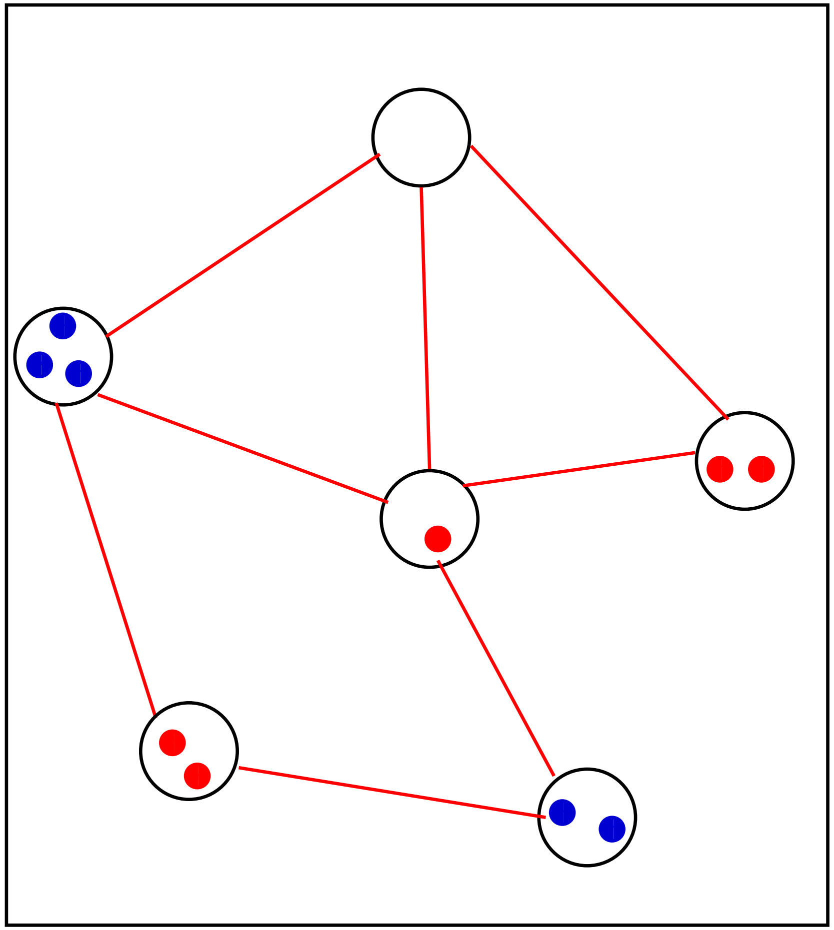


Peut-on faire disparaître tous les grains?

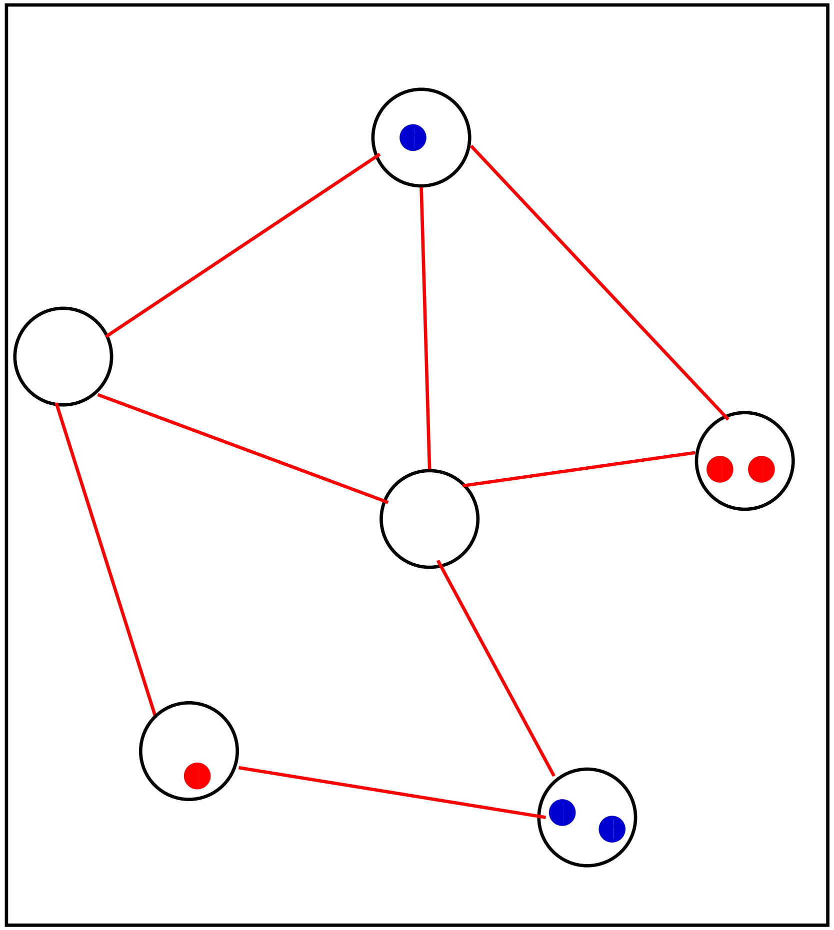
Exemple



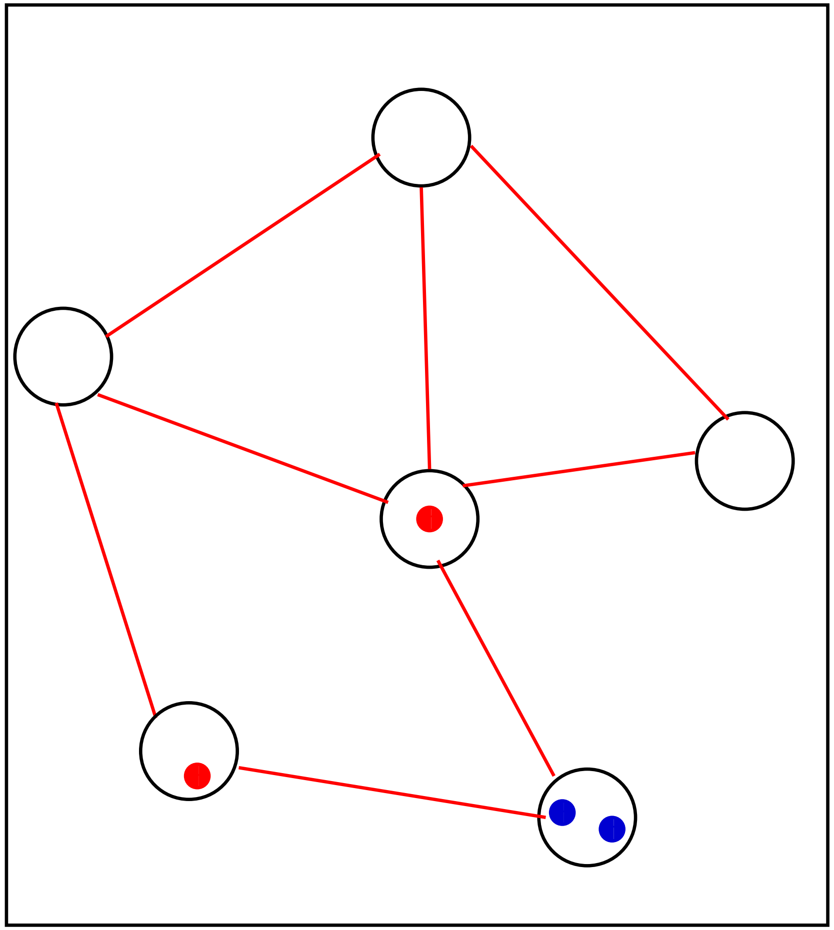
Exemple



Exemple



Exemple



Questions

Une configuration est *stable* si aucun éboulement ne peut se produire.

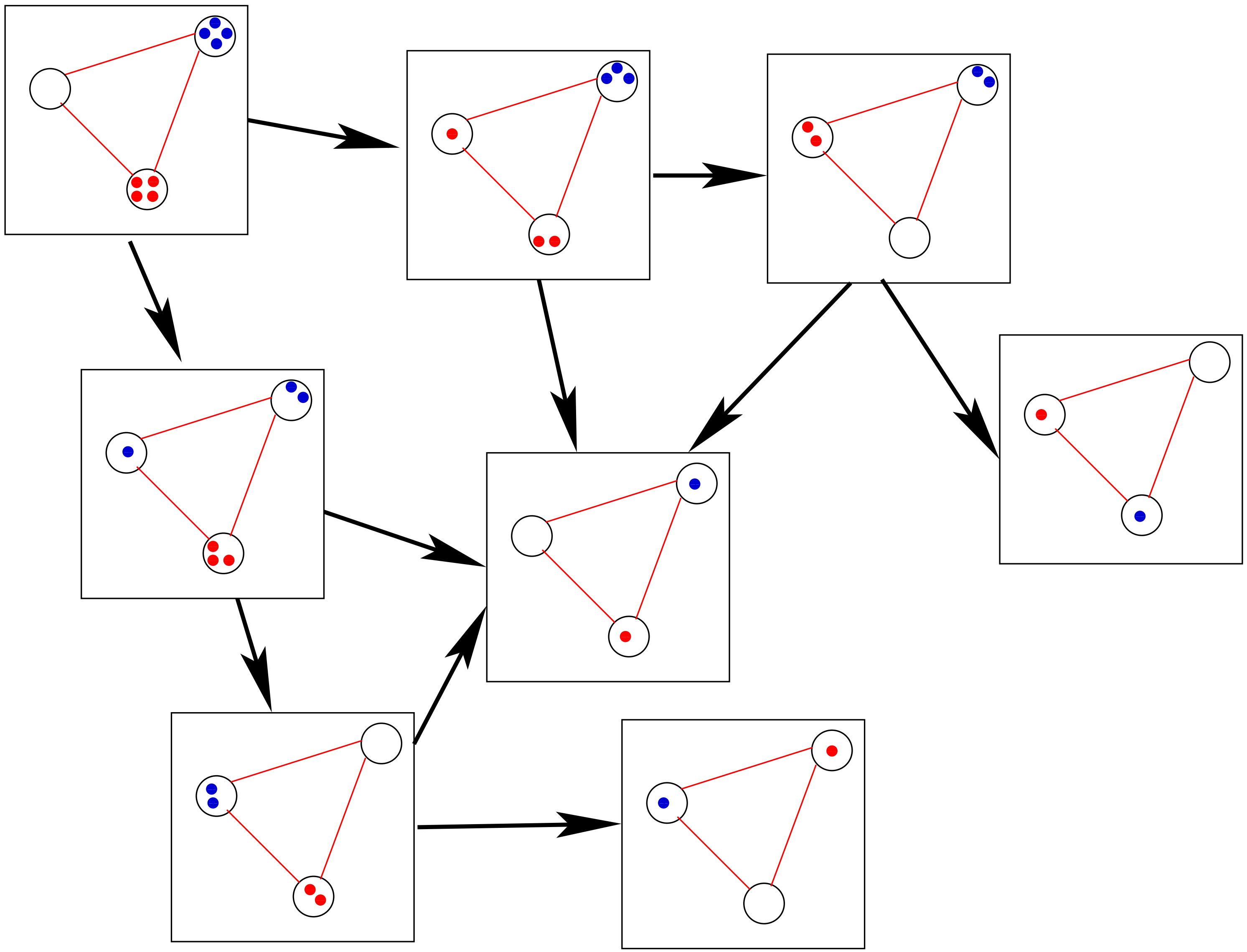
- Combien de configurations stables différentes obtient-on à partir d'une configuration donnée?
- Peut-on obtenir la configuration sans aucun grain?
- On se donne deux configurations stables, peuvent-elles être obtenues à partir d'une même troisième?

Un résultat

L’ensemble des configurations stables peut être partitionné en classes telles que

- Deux configurations sont dans une même classe si seulement s’il existe une configuration qui permet d’obtenir chacune des deux par éboulements
- **Théorème** Le nombre de classes est égal au nombre d’arbres recouvrants du graphe

Calcul d'une classe



Un peu d'algèbre

- Une configuration sur $G = (X, E)$ est représentée par une application u :

$$X \rightarrow \mathbb{Z}$$

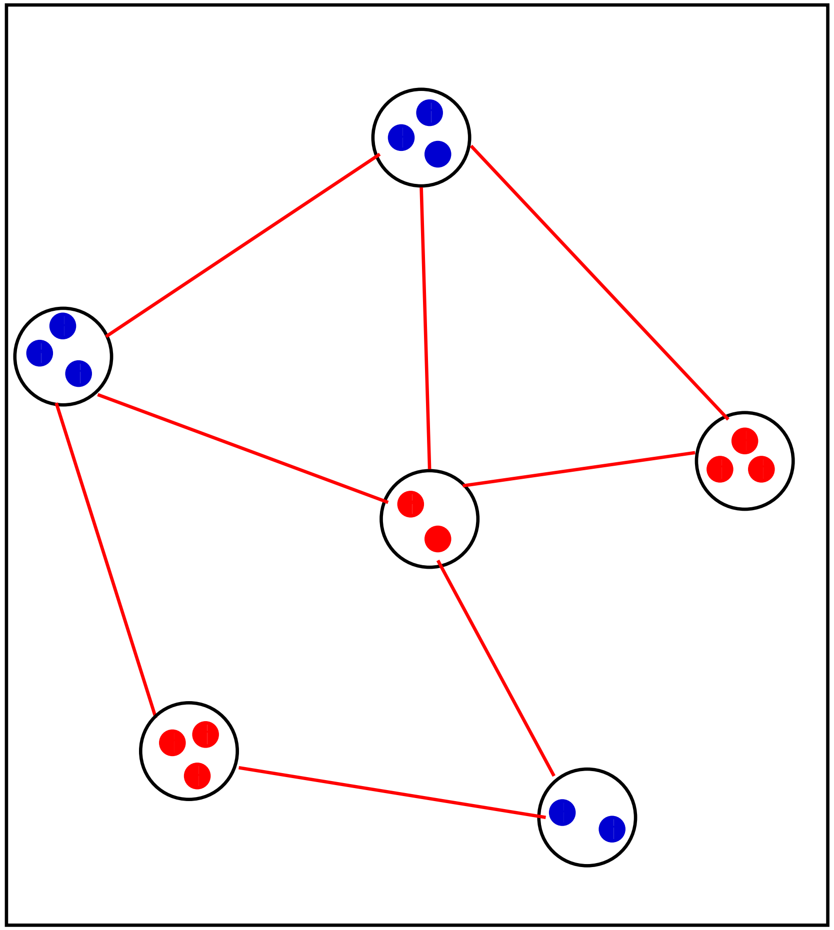
- Si x_i contient a grains rouges alors $u_i = a$
- Si x_i contient b grains bleus alors $u_i = -b$

Eboulements

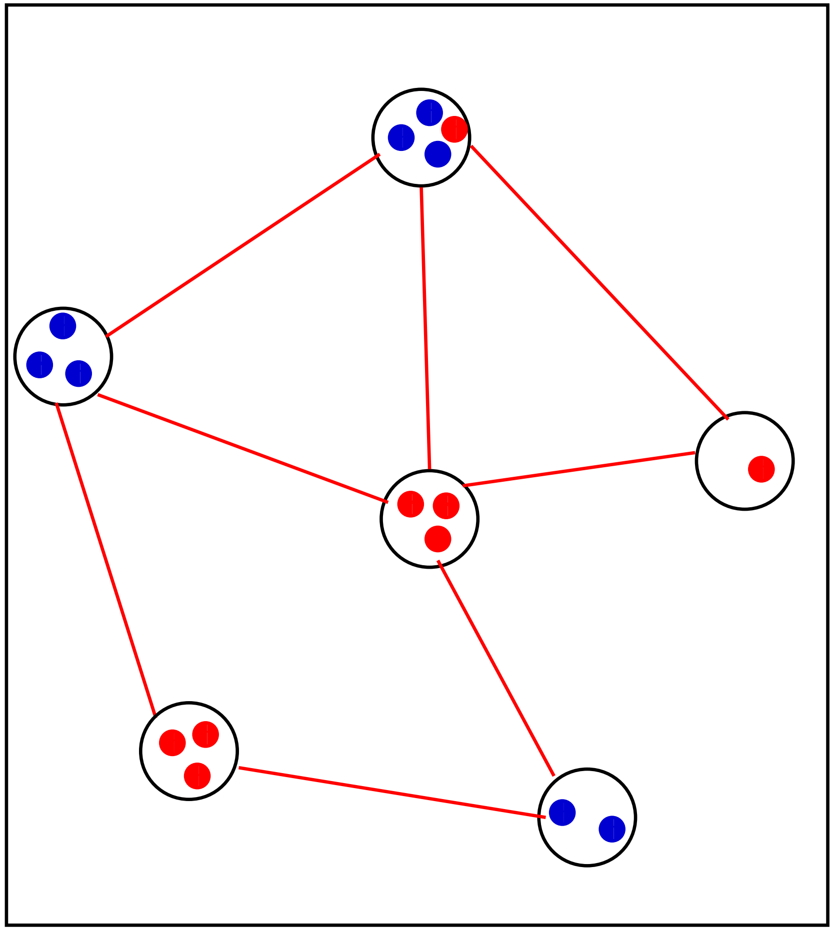
- Un éboulement d'un sommet x_i contenant des grains bleus revient à ajouter à la configuration u le vecteur Δ_i tel que $\Delta_{i,i} = d_i$ (degré de x_i), $\Delta_{i,j} = -e_{i,j}$ (nombre d'arêtes entre x_i et x_j)
- Un éboulement d'un sommet x_i contenant des grains rouges revient à soustraire à la configuration u le vecteur Δ_i

On représente le tout par une matrice Δ dont les lignes sont les Δ_i.

Exemple



Exemple



Forme de Smith

Toute matrice sur les entiers (en particulier Δ) peut être décomposée en un produit de trois matrices :

$$D = U \Delta V$$

telles que

- U et V sont des matrices de déterminant égal à 1.
- D est une matrice digaonale
- Chaque élément de la diagonale de D divise le suivant

Caractérisation des configurations équivalentes

- On utilise les lignes de la matrice U notées : $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$,
- Deux configurations u, v sont équivalentes si les produits $\theta_i u$ et $\theta_i v$ sont égaux $mod\ \ d_i$ pour tout i
- Bijections entre configurations récurrentes et suite d'entiers

Configurations récurrentes dans le modèle du tas de sable classique

- Configurations dont tous les u_i sont positifs ou nuls sauf u_n et aucun aucun éboulement rouge n'est possible
- De plus on doit retrouver u à partir de la configuration $u + \Delta_n$ en n'effectuant que des éboulements rouges.
- Il y a une configuration récurrente et une seule par classe.

Le cas du graphe K_5

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fonctions de parking

Une fonction *de parking* est une suite d'entiers $u = u_1, u_2, \ldots, u_n$ supérieurs ou égaux à 0, telle qu'il existe une permutation $a = a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaisant :

$$\forall i, \quad u_i < a_i$$

Par exemple, $3, 0, 1, 3, 1$ est une fonction de parking, dont la permutation $4, 1, 3, 5, 2$ est un certificat; en revanche $1, 4, 2, 0, 4$ n'en est pas une.

Lien avec les tas de sable

Il existe une bijection (simple à calculer) entre les fonctions de parking de longueur n et les classes du modèle du tas de sable (classique ou bicolore) sur le graphe complet K_{n+1}.

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \rightarrow (p_1, p_2, \ldots, p_n, -q)$$

où :

$$q = \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Conséquence Le nombre de fonctions de parking de taille n est :

$$(n+1)^{n-1}$$

Le cas du graphe K_5

$$\Delta = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Famille de bijections

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \to (q_1, q_2, \ldots, q_{n-1})$$

$$0 \le q_i \le n$$

$$q_i = p_i + \sum_{j=1}^{n} p_j$$

En fait, une bijection nouvelle pour chaque matrice U telle que :

$$D = U \, \Delta \, V$$

Fonctions de parking généralisées

- On se donne une suite d'entiers $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$
- Une fonction de *de* x*-parking* est une suite d'entiers $u = u_1, u_2, \ldots, u_n$ compris entre 0 et $n-1$, telle qu'une fois réordonnée en $u' = u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ de façon telle que $u'_i \leq u'_{i+1}$ on ait pour tout i :,

$$u'_i < \sum_{j=1}^{i} x_j$$

- Les parkings ordinaires sont les $(1, 1, 1, \ldots, 1)$-parkings
- Plusieurs articles sur les $(a, b, b, \ldots, b)$-parkings que l'on appelera (a, b)-parkings

Enumération

Le nombre de fonctions de (a, b)-parking de longueur n est donné par :

$$a(a + bn)^{n-1}$$

Deux preuves

1. Tas de sable sur un multi-graphe complet à $n + 1$ sommets $v_0, v_1, \ldots v_n$ où le sommet v_0 est relié à chacun des autres par a arêtes et deux v_i, v_j, $i, j > 0$, sont reliés entre eux par b arêtes.

2. Chaque suite de nombres $x_1, \ldots x_n$ tels que $0 \leq x_i < a + nb$ admet exactement a conjugués qui sont des (a, b)-parkings.