M2, Analyse d'Algorithmes

Contrôle continu

A remettre avant le lundi 11 décembre

On écrira les algorithmes demandés en utilisant un des langages de programmation de votre choix : C, Java, Pascal, Caml.

Problème 1 : Mots permutations, tableaux de Young

I. Mots de parenthèses

On considère l'algorithme suivant permettant de construire un ensemble de mots de parenthèses $u_1, u_2, \ldots, u_k$ de longueur $2n+2$ sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ à partir d'un mot de parenthèses f de longueur $2n$:

1. Décomposer f de toutes les manières possibles sous la forme $f = g_i h_i$ de façon telle que g_i et h_i soient des mots de parenthèses, éventuellement vides. On note k le nombre de décompostions obtenues ;
2. Poser $u_i = a g_i b h_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

On notera $\nabla(f)$ l'ensemble des mots ainsi construits à partir de f.
Ainsi, pour $n = 5$, si $f = abaababbab$, on obtient $k = 4$ et les mots construits sont

$$\nabla(f) = \{ababaababbab, aabbaababbab, aabaababbbab, aabaababbabb\}$$

Question 1. Montrer que pour tout mot de parenthèses f de longueur $2n$ $(n \geq 1)$ $\nabla(f)$ contient au moins deux éléments et au plus $n+1$. Donner un exemple de mot pour chacun de ces deux cas.
Question 2. Montrer que pour tout mot de parenthèses u de longueur supérieure à 2 il existe un et un seul mot de parenthèses f tel que $u \in \nabla(f)$. Pour cela vous donnerez un algorithme qui construit f connaissant u.

Dans la suite on note $a_{n,k}$ le nombre de mots de parenthèses f de longueur $2n$ tels que $\nabla(f)$ contienne $k+1$ mots.
Question 3. Montrer que $a_{n,n} = 1$ et que

$$a_{n,1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$$

Question 4. Démontrer que

$$a_{n+1,k} = \sum_{j=k-1}^{n} a_{n,j}$$

et donner le tableau des $a_{n,k}$ pour $n = 2, 3, 4$.

Question 5. Quelles sont les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$ et de $\sum_{k=1}^{n}(k+1)a_{n,k}$?

II. Permutations et tableaux de Young

Question 1. Donner les 11 formes de tableaux de Young ayant 6 cases. Pour chaque forme F obtenue déterminer le nombre de tableaux ayant cette forme et le nombre de permutations telles que l'algorithme de Robinson-Schenstedt donne deux tableaux de forme F.

On rappelle que la longueur de la première ligne du tableau associé à une permutation α par l'algorithme de Robinson-Schenstedt est égale à la longueur de la plus longue sous-suite croissante de α. On note $s_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ dont la longueur de la plus longue sous-suite croissante est k.

Question 2.

En utilisant le résultat de la question précédente, donner les valeurs de $s_{6,k}$ pour $1 \leq k \leq 6$.

Question 3. Quelle est la longueur moyenne de la plus longue sous-suite croissante des permutations de $\{1, 2, \dots, 6\}$?

III. Permutations sans sous-suite croissante de longueur 3

On considère dans cette partie l'ensemble T_n de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ dont la plus longue sous-suite croissante est de longueur 1 ou 2.

Question 1. Donner les 14 permutations appartenant à T_4.

On décompose toute permutation $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ en deux parties de la façon suivante : la première partie $a_1 a_2 \dots a_k$ est une suite décroissante ($a_1 > a_2 > \dots > a_k$) et la deuxième $a_{k+1} \dots a_n$ est telle que $a_{k+1} > a_k$. Noter que la permutation $n, n-1, n-2, \dots, 2, 1$ est la seule permutation pour laquelle la deuxième partie est vide. On dit que l'entier k est la *décroissance initiale* de α.

On note $t_{n,k}$ le nombre de permutations de T_n de décroissance initiale k.

Question 2. On suppose que α est une permutation de T_n de décroissance initiale k, quel est le nombre de façons d'insérer $n+1$ dans α donnant une permutation de T_{n+1} ? Quelles sont les décroissances initiales des permutations ainsi obtenues ?

Question 3. Montrer que

$$t_{n+1,k} = \sum_{j=k-1}^{n} t_{n,j}$$

Question 4. Montrer que le nombre de permutations de T_n de décroissance initiale k est égal au nombre $a_{n,k}$ de mots de parenthèses défini dans la partie I.

Question 5. Quel est le nombre de permutations de T_n ?

Problème II : Index du major des permutations

I. Génération de mots

On utilise l'alphabet à deux lettres $A = \{m, d\}$; la signification des noms des lettres apparaîtra dans la partie II.

A tout mot f de A^* de longueur $n-1$ on associe l'ensemble $\phi(f)$ composé de $n+1$ mots (tous de longueur n) obtenus de la façon suivante :

– ajout de d au début de f
– ajout de m à la fin de f
– remplacement d'une des lettre de f par md ; et ceci de toutes les façons possibles.

Ainsi par exemple, pour $f = mdm$ on a $(n = 4)$, $\phi(f) = \{dmdm, mdmm, mddm, mmdm, mdmd\}$.

Question 1. Pour le mot $g = mdmm$ donner les trois mots f tels que $g \in \phi(f)$.

Une chaîne de production d'un mot non vide g de longueur A^* est une suite de mots $f_1, f_2, \ldots f_n$ tels que $f_1 = m$ ou $f_1 = d$, $f_n = g$ et $f_{i+1} \in \phi(f_i)$ pour $1 \leq i < n$; ainsi le mot f_i est de longueur i. On écrira cette chaîne :

$$f_1 \to f_2 \to \ldots \to f_n$$

Par exemple le mot mdm possède 5 chaînes de production différentes :

$$m \to md \to mdm, m \to mm \to mdm, m \to dm \to mdm, d \to dm \to mdm$$

$$d \to md \to mdm, d \to md \to mdm$$

Question 2. Donner les neuf chaînes de production de $mdmm$.

Dans la suite on note $pr(f)$ le nombre de chaînes de production du mot f.

Question 3. Donner un algorithme qui étant donné un mot f détermine le nombre $pr(f)$.

Question 4. On note F_n la somme du nombre de chaînes de productions de tous les mots f de longueur n.

$$F_n = \sum_{F \in A^n} pr(f)$$

Ainsi par exemple :

$$F_1 = pr(m) + pr(d) = 1 + 1 = 2$$

$$F_2 = pr(dd) + pr(dm) + pr(md) + pr(mm) = 1 + 2 + 2 + 1 = 6$$

Montrer que pour $n > 1$, $F_n = (n+1)F_{n-1}$ quel est la valeur de F_n ?

II. Profil d'une permutation

Pour toute permutation $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ on associe un mot f de longueur $n-1$ sur l'alphabet $A = \{m, d\}$ tel que la i-ème lettre f_i de f est m si $a_{i+1} > a_i$ et d si $a_{i+1} < a_i$. On dira que f est le *profil* de α et on note $f = \pi(f)$.

Par exemple pour la permutation

$$\alpha = 3, 7, 2, 1, 5, 8, 9, 4, 6$$

le profil est

$$\pi(\alpha) = mddmmmdm$$

Question 1. Donner une autre permutation α' ayant même profil que la permutation α donnée en exemple.

Question 2. Soit $\beta = b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. ayant pour profil g. Comment se calculent les profils des permutations suivantes :

- $n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$
- $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, n$
- $b_1, b_2, \ldots, b_i, n, b_{i+1}, \ldots, b_{n-1}$ (pour $1 \leq i < n$)

Question 3. Comment calculer le nombre de permutations de profil donné f en utilsant les résultats de la partie 1 ? Justifier votre réponse.

III. Index d'une permutation

Pour toute permutation α l'index $ind(\alpha)$ est la somme des indices des descentes de α ; soit :

$$ind(\alpha) = \sum_{a_i > a_{i+1}} i$$

Par exemple la permutation $\beta = 3, 7, 2, 1, 5, 8, 4, 6$ possède des descentes aux indices 2 (car $7 > 2$), 3 (car $2 > 1$) et 6 (car $8 > 4$) son index est donc $11 = 2 + 3 + 6$.

Question 1. Calculer les index des 9 permutations obtenues en insérant 9 dans la permutation β de toutes les façons possibles.

Question 2. Comment se calcule l'index de α à partir du profil $\pi(\alpha)$ défini dans la partie II ?

Question 3. Montrer que pour une permutation quelconque de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ l'insertion de n dans β donne n permutations ayant des index tous différents et de valeur $ind(\beta + i)$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Question 4. Soit $I_{n,k}$ le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant index k. Donner une formule qui permet de calculer $I_{n,k}$ en fonction des $I_{n-1,j}$ (pour $0 \leq j \leq k$).

Question 5. Déduire de la question précédente que $I_{n,k}$ est aussi le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ présentant k inversions.