

Systemes d'eductifs: Exercices

Alexandre Zvonkine

September 18, 2006

Thème: Prédicats, quantificateurs et théories du premier ordre.

1 Géométrie élémentaire

Dans cette série d'exercices

- l'ensemble de base est le plan euclidien π ;
- il n'y a pas de fonctions;
- il y a deux prédicats :
 - égalité = (c'est-à-dire, coïncidence de points), et
 - le prédicat $e(A, B, X)$ qui veut dire : “les points A et B se trouvent à la même distance de X ” (c'est-à-dire, $|AX| = |BX|$).

Dans chaque exercice il est demandé d'exprimer tel ou tel prédicat.

Exercice 1.1 Exprimer le prédicat $l(A, B, C)$: “les trois points A, B, C sont alignés”.

Exercice 1.2 Exprimer le prédicat $p(A, B, C, D)$: “les lignes AB et CD sont parallèles”.

Exercice 1.3 Exprimer le prédicat $pp(A, B, C, D)$ qui veut dire : “ $ABCD$ est parallélogramme”.

Exercice 1.4 Exprimer le prédicat $d(A, B; C, D)$: $|AB| = |CD|$.

Exercice 1.5 Exprimer le prédicat $v(O, A, B)$: $|OA| \leq |OB|$.

Exercice 1.6 Exprimer le prédicat $s(A, B, X)$: “le point X appartient au segment $[AB]$ ”.

Exercice 1.7 Exprimer le prédicat $r(A, B, X)$: “le point X appartient à la demi-droite $[AB]$ ”.

Exercice 1.8 Exprimer le prédicat $t(A, B, C; A', B', C')$: “les triangles ABC et $A'B'C'$ sont égaux”.

Exercice 1.9 Exprimer le prédicat $a(A, O, B; A', O', B')$: “les angles AOB et $A'O'B'$ sont égaux”.

Exercice 1.10 Exprimer le prédicat $ad(A, C, B)$: “l’angle ACB est droit”.

1.1 Arithmétique

Les ingrédients de la structure :

- l’ensemble de base : \mathbb{N}
- fonctions : $+$, \times
- prédicat : $=$

Exprimer les prédicats suivants :

$x \leq y$, $x < y$, $x = 0$, $x = 1$, $x|y$, p est premier, $d = \text{pgcd}(a, b)$, $m = \text{ppcm}(a, b)$, q est le quotient, et r est le reste de division de a par b , x est une puissance de 2.

On cherche maintenant à exprimer le prédicat “ x est une puissance de 4” (un exercice très dur).

On identifie les éléments de \mathbb{N} avec les mots binaires de la manière suivante :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
ε	0	1	00	01	10	11	000	001	010	011	100	101	...

La règle est la suivante : $x \in \mathbb{N} \longrightarrow$ (1) écrire $x + 1$ en binaire; (2) enlever le premier chiffre 1.

Exercice 1.11 Exprimer le prédicat : “le mot u consiste que de zéros”.

Exercice 1.12 Exprimer le prédicat : “les mots u et v ont la même longueur”.

Exercice 1.13 Exprimer le prédicat : “le mot w est la concaténation $w = uv$ ”.

Exercice 1.14 Exprimer les prédicats : “ u est un préfixe de w ”; “ v est un suffixe de w ”; “ u est un facteur de v ”.

Soit le prédicat $P(s, t, u)$: “le mot sus est un facteur du mot t ”. Il est clair que l’ensemble

$$U_{s,t} = \{u | P(s, t, u)\}$$

est fini.

Exercice 1.15 *Tout ensemble fini U peut être représenté dans la forme $U_{s,t}$ pour certains s et t .*

Exercice 1.16 Exprimer le prédicat : “ x est une puissance de 4”.