

LOGIQUE

TD10 : Arithmétique de Presburger

Exercice 7.1 Construction d'automates

1- Ecrire un automate fini reconnaissant chacun des langages suivants :

$$\nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x = y\}); \quad \nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\})$$

2- Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Décrire un automate fini reconnaissant

$$\nu^{-1}(\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid \alpha x = y\})$$

Exercice 7.2 Equations linéaires

On considère le système d'équations (et inéquations) en nombres entiers :

$$2x + y = z, x \leq y$$

1- Comment décrire l'ensemble de ses solutions au moyen d'un automate fini ?

2- Supposons que l'on veuille résoudre un système d'équations et inéquations sur \mathbb{N} en utilisant la théorie des automates.

2.1 en combien de temps peut-on décider l'existence de solutions ?

2.2 majorer la taille minimale d'une solution, s'il en existe.

Exercice 7.3 Langage des carrés

On considère le prédicat $C(x)$ défini par :

$$C(n) \Leftrightarrow \exists y, x = y \times y$$

1- Montrer que le prédicat $x \times y = z$ est définissable dans le langage $\mathcal{L}_1(+, =, C)$.

2- En déduire que la théorie du premier ordre de $\langle \mathbb{N}, +, =, C \rangle$ est indécidable.

3- Montrer que le langage

$$\{u \in \Sigma_2^* \mid \nu(u) \text{ est un carré} \}$$

n'est pas rationnel.

Exercice 7.4 Entiers relatifs

Montrer que la théorie du premier ordre de

$$\langle \mathbb{Z}, +, 0, 1, \leq, = \rangle$$

est décidable.

Exercice 7.5 Arithmétique de Skolem

Montrer, en vous appuyant sur les propriétés de clôture et de décidabilité des automates finis de termes, que la théorie du premier ordre de

$$\langle \mathbb{N}, \times, = \rangle$$

est décidable.

Exercice 7.6 Logique sur les mots

1- Montrer, en vous appuyant sur les propriétés de clôture et de décidabilité des automates finis de mots, que la théorie du premier ordre de

$$\langle X^*, \approx, \preceq, (S_x)_{x \in X} \rangle$$

[où $u \approx v$ signifie $|u| = |v|$, \preceq dénote l'ordre préfixe et $u = S_x(v)$ signifie $u = v \cdot x$] est décidable.

2- Tout langage rationnel de X^* est-il définissable dans cette logique ?

Exercice 7.7 Logique sur le monoïde libre

Montrer, en vous appuyant sur l'indécidabilité du PCP, que la théorie du premier ordre de

$$\langle \{a, b, c\}^*, a, b, c, \cdot, = \rangle$$

est indécidable.