Université Bordeaux 1
Mastère d'Informatique 1, 2011/2012

LOGIQUE

TD 3 : Structures de Kripke

Exercice 3.1
Donner une preuve sémantique de $\Vdash \forall x \neg\neg(R(x) \vee \neg R(x))$

Exercice 3.2
1- Trouver une structure de Kripke $\mathcal{K}$ qui est un contre-modèle de

$$(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$$

2- Le séquent $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ est-il prouvable dans LK ? dans LJ ?

Exercice 3.3 LJ versus LK
On considère les séquents suivants qui sont prouvables dans LK (voir la feuille 1). Déterminer pour chacun d'eux s'il est prouvable dans LJ.
1- $\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
2- $\vdash ((P \to Q) \to P) \to P$
3- $\vdash \neg\forall x \neg R(x) \to \exists x R(x)$
4- $\vdash \exists x \forall y (R(y) \to R(x))$
5- $\forall x \neg R(x) \vdash \neg\exists x R(x)$
6- $\vdash \exists x (R(a) \vee R(b) \to R(x))$.

Exercice 3.4 Bisimulations
Soient $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ des structures de Kripke sur une signature propositionnelle $\mathcal{Q} = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$. On note $\mathcal{K}_i = (K_i, \leq_i, \Vdash_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. Une relation $R \subseteq K_1 \times K_2$ est une *bisimulation* ssi elle vérifie les trois propriétés B1,B2,B3 suivantes :
(B1) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall Q \in \mathcal{Q}, k_1 \Vdash Q \Leftrightarrow k_2 \Vdash Q$
(B2) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall k_2' \in K_2$ tel que $k_2 \leq_2 k_2'$,

$$\exists k_1' \in K_1 \text{ tel que } (k_1', k_2') \in R \;\; \& \;\; k_1 \leq_1 k_1'.$$

(B3) $\forall (k_1, k_2) \in R, \forall k_1' \in K_1$ tel que $k_1 \leq_1 k_1'$

$$\exists k_2' \in K_2 \text{ tel que } (k_1', k_2') \in R \;\; \& \;\; k_2 \leq_2 k_2'.$$

1- Montrer que si R est une bisimulation alors, pour tout $(k_1, k_2) \in R$ et pour toute formule A,

$$k_1 \Vdash_1 A \Leftrightarrow k_2 \Vdash_2 A.$$

2- Montrer que toute structure de Kripke possédant un plus petit élément est bisimilaire à un arbre.

Exercice 3.5 Une structure complète
Soit $\mathcal{K} = (K, \leq, \Vdash)$ une structure de Kripke sur la signature propositionnelle $\mathcal{Q}$ et A une formule sur $\mathcal{Q}$. On note $SF(A)$ l'ensemble des sous-formules de A. Pour tout $k \in K$ on note $S(k) := \{B \in SF(A) \mid k \Vdash B\}$. On définit une structure de Kripke $\mathcal{K}^* = (K^*, \leq^*, \Vdash^*)$ par :

$$K^* := \{S(k) \mid k \in K\}, \;\; S(k) \leq^* S(k') \Leftrightarrow S(k) \subseteq S(k')$$

et pour tout $Q \in \mathcal{Q}$

$$S(k) \Vdash^* Q \Leftrightarrow Q \in S(k).$$

1- Montrer que, pour tout $B \in SF(A)$ et tout $k \in K$,

$$k \Vdash B \Leftrightarrow S(k) \Vdash^* B$$

2- En déduire une méthode sémantique permettant de tester, pour toute formule propositionnelle A si $\Vdash A$.
3- Montrer que, pour toute formule propositionnelle A , $\vdash_{\mathrm{LJ}} A$ ssi toute structure de Kripke finie $\mathcal{K}$ réalise A.
4- En utilisant l'exercice 3.4, montrer que, pour toute formule propositionnelle A , $\vdash_{\mathrm{LJ}} A$ ssi toute structure de Kripke $\mathcal{K}$ qui est un arbre fini réalise A.
5- Construire une structure de Kripke propositionnelle $\mathcal{K}$ sur $\mathcal{Q}$, qui est un arbre dénombrable et telle que, pour toute formule propositionnelle A sur $\mathcal{Q}$,

$$\vdash_{\mathrm{LJ}} A \Leftrightarrow \mathcal{K} \Vdash A.$$