

1ère Année ENSEIRB option Telecom

Algorithmique et structure de données

Devoir d'entraînement 2 (facultatif)

à rendre le 3 novembre.

1 Une suite récurrente

On considère la suite suivante donnée par récurrence

$$u_n = n \text{ si } n \leq 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + n \text{ sinon} \quad (1)$$

1. Calculer u_5
2. Ecrire une fonction récursive simple qui calcule cette suite.
3. Donner une formule de récurrence pour le nombre a_n d'additions effectuées par l'algorithme récursif de calcul pour déterminer u_n .
4. Démontrer que $a_n = 2f_{n+1} - 2$ où f_n est la suite de Fibonacci :

$$f_n = n \text{ si } n \leq 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ sinon} \quad (2)$$

5. En vous inspirant de l'algorithme expliqué en cours pour la suite Fibonacci écrire un algorithme récursif efficace pour le calcul de la suite u_n .
6. On considère une suite v_n déduite de cette suite en posant $v_n = u_n + n + a$ où a est un entier. Quelle doit être la valeur de a pour que $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$. En déduire une formule qui donne u_n à partir de la suite de Fibonacci f_n .

2 Tours de Hanoï

On reprend la procédure sur la tour de Hanoï vue en cours

```
Hanoi(a, b, c, n){
  // De a vers c, b est auxiliaire
  if (n == 1) {
    afficher(a); afficher("vers"); afficher(c);}
  else {
    Hanoi(a,c,b, n-1);
    afficher(a); afficher("vers"); afficher(c);
    Hanoi(b,c,a, n-1);}
}
```

A chaque execution de la procédure Hanoï on associe une chaîne de caractères de la façon suivante : Un déplacement d'une rondelle du piquet 1 vers le piquet 3 est noté par le symbole a , du piquet 1 vers le piquet 2 par le symbole b et du piquet 2 vers le piquet 3 par c . Les déplacements inverses sont notés par les mêmes lettres avec une barre dessus ($\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$). Ainsi la chaîne de caractères correspondant au déplacement de deux rondelles du piquet 1 vers le piquet 3 selon l'algorithme décrit en cours est : $h_2 = bac$

1. Donner la chaîne correspondant au déplacement de 3 rondelles.
2. Quelle est la longueur de la chaîne h_n correspondant au déplacement de n rondelles ?
3. En s'aidant des transformations suivantes sur les caractères donnez un procédé de calcul de la chaîne h_{n+1} en connaissant h_n .

	a	b	c	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
ϕ	b	a	\bar{c}	\bar{b}	\bar{a}	c
ψ	c	\bar{b}	a	\bar{c}	b	\bar{a}

4. Montrez que lorsque l'on supprime les barres au dessus des caractères intervenant dans la chaîne h_n on obtient une chaîne très régulière.
5. En déduire une procédure itérative permettant de résoudre le problème des tours de Hanoï.