Polynômes quasi-invariants et super-covariants pour le groupe symétrique généralisé

Jean-Christophe Aval

(A2X, Bordeaux)

Rappel 1

$\mathcal{S}_n$: groupe symétrique

groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

$$\sharp\, \mathcal{S}_n = n!$$

Action "classique" de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{C}[X_n]$:

$$\sigma \,.\, P(x_1, \ldots, x_n) = P(\sigma . X_n) = P(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

$P \in \mathbb{C}[X_n]$ est *symétrique* ssi

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sigma \,.\, P = P.$$

Sym_n : espace des polynômes symétriques.

Définition 1 Espace harmonique :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_n &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] \ / \ \forall Q \in Sym_n^+,\, Q(\partial)\, P = 0\} \\ &\simeq \mathbb{C}[X_n]/\langle Sym_n^+\rangle.\end{aligned}$$

Théorème 1 (Artin)

$$\dim \mathbf{H}_n = n!\,.$$

Définition 2

$G_{n,m}$: *groupe symétrique généralisé*

$= C_m \wr \mathcal{S}_n$

: groupe des matrices de pseudo-permutations dont les entrées non nulles sont des racines m-ièmes de l'unité.

Exemple 1

$$\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in G_{5,4}$$

Remarque 1 $\sharp\, G_{n,m} = m^n\, n!$

$B_n = G_{n,2}$: *groupe hyperoctahédral*

: groupe des permutations signées.

$\mathcal{S}_n = G_{n,1}$

Action de $G_{n,m}$ sur $\mathbb{C}[X_n]$:

$$g.P(X_n) = P(g.X_n)$$

Exemple 2 $m = 3,\ j = e^{\frac{i2\pi}{3}},\ n = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} .\,(x_1^2\, x_2) = j^2\, x_1\, x_3^2.$$

Définition 3 Polynômes invariants :

$$P \in Inv_{n,m} \ \Leftrightarrow\ \forall g \in G_{n,m},\ g\,.\,P = P.$$

Proposition 1

$$P \in Inv_{n,m} \ \Leftrightarrow\ \exists Q \in Sym_n \ /\ P(X_n) = Q(X_n^m).$$

Définition 4 Polynômes covariants :

$$\begin{aligned} Cov_{n,m} &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] \ / \ \forall Q \in Inv_{n,m}^{+},\ Q(\partial)\, P = 0\} \\ &\simeq \mathbb{C}[X_n]/\langle Inv_{n,m}^{+}\rangle. \end{aligned}$$

Remarque 2 $Cov_{n,1} = \mathbf{H}_n$.

Théorème 2 (Chevalley)

$$\dim Cov_{n,m} = \sharp\, G_{n,m} = m^n\, n!\,.$$

Définition 5 Action quasi-symétrisante de $\mathcal{S}_n$ (F. Hivert) :

$$A \subset X_n,\ \sharp A = l,\ K = (k_1, \ldots, k_l),\ k_i > 0,$$

$$\sigma \bullet A^K = \{\sigma.A\}_<^K.$$

Exemple 3 $\sigma = 4231$

$$\begin{aligned}
\sigma \bullet (x_1\, x_3^2) &= \sigma \bullet (x_1, x_3)^{(1,2)} \\
&= \{\sigma.(x_1, x_3)\}_<^{(1,2)} \\
&= \{x_4, x_3\}_<^{(1,2)} \\
&= \{x_3, x_4\}^{(1,2)} \\
&= x_3\, x_4^2.
\end{aligned}$$

Fonctions quasi-symétriques

Définition 6 $P \in \mathbb{C}[X_n]$ est *quasi-symétrique* si $\forall k \leq n,\ \forall (a_1, \ldots, a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$,

$$[x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_k}^{a_k}]P = [x_{j_1}^{a_1} \cdots x_{j_k}^{a_k}]P$$

dès que $i_1 < \cdots < i_k$ et $j_1 < \cdots < j_k$.
Notons $QSym_n$ leur ensemble.

Remarque 3 Il est clair que $Sym_n \subset QSym_n$, mais (n=3)

$$x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 \in QSym_n \backslash Sym_n.$$

[2,1,0]+[2,0,1]+[0,2,1]

Proposition 2

$$P \in QSym_n \;\Leftrightarrow\; \forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\; \sigma \bullet P = P.$$

Définition 7 Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ une composition de $|\alpha| = k \geq 0$, noté : $\alpha \models k$, on définit :

$$M_\alpha(X_n) = \sum_{0 \leq i_1 < \cdots < i_l \leq n} x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$$

et

$$F_\alpha(X_n) = \sum_{\beta \succeq \alpha} M_\beta(X_n).$$

Exemple 4 $n = 3, \alpha = (1, 2)$:

$$\begin{aligned} M_\alpha &= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 \\ F_\alpha &= M_{(1,2)} + M_{(1,1,1)} \\ &= x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Définition 8 Espace Super-Harmonique

$$\begin{aligned}\mathbf{SH}_n &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] \;/\; \forall Q \in QSym_n^+,\; Q(\partial)P = 0\} \\ &\simeq \mathbb{C}[X_n]/\langle QSym_n^+\rangle.\end{aligned}$$

Remarque 4

$$Sym_n \subset QSym_n \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{SH}_n \subset \mathbf{H}_n.$$

Théorème 3 (Aval, Bergeron, Bergeron)

$$\dim \mathbf{SH}_n = C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Groupe	$\mathcal{S}_n$	$G_{n,m}$
Invariants Covariants	Sym_n $\dim \mathbf{H}_n = n!$	$Inv_{n,m}$ $\dim Cov_{n,m} = m^n\, n!$
Quasi-invariants Super-covariants	$QSym_n$ $\dim \mathbf{SH}_n = C_n$	

Action quasi-symétrisante de $G_{n,m}$ sur $\mathbb{C}[X_n]$:

$$g \bullet A^K = \{g.A\}^K_<$$

Exemple 5 $m = 3,\ j = e^{\frac{i2\pi}{3}},\ n = 3$

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet (x_1^2\, x_2) \\
= & \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & j \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} . \{x_1, x_2\} \right]^{(2,1)}_< \\
= & \{j\, x_3, x_1\}^{(2,1)}_< \\
= & \{x_1, j\, x_3\}^{(2,1)} \\
= & j\, x_1^2\, x_3.
\end{aligned}
$$

Définition 9 Quasi-invariants

$$P \in QInv_{n,m} \;\Leftrightarrow\; \forall g \in G_{n,m},\; g \bullet P = P.$$

Proposition 3

$$P \in QInv_{n,m} \;\Leftrightarrow\; \exists Q \in QSym_n \;/\; P(X_n) = Q(X_n^m).$$

Exemple 6

$$\begin{aligned} M_{2,1}(X_3) &= x_1^2\,x_2 + x_1^2\,x_3 + x_2^2\,x_3 \\ &\in QSym_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{2,1}(X_3^2) &= x_1^4\,x_2^2 + x_1^4\,x_3^2 + x_2^4\,x_3^2 \\ &\in QInv_{3,2} \end{aligned}$$

Définition 10 Super-covariants

$$\begin{aligned}SCov_{n,m} &= \{P \in \mathbb{C}[X_n] \,/\, \forall Q \in QInv^{+}_{n,m},\ Q(\partial)P = 0\} \\ &\simeq Q[X_n]/\langle QInv^{+}_{n,m}\rangle.\end{aligned}$$

Théorème 4

$$\dim SCov_{n,m} = m^n\, C_n.$$

Corollaire 1

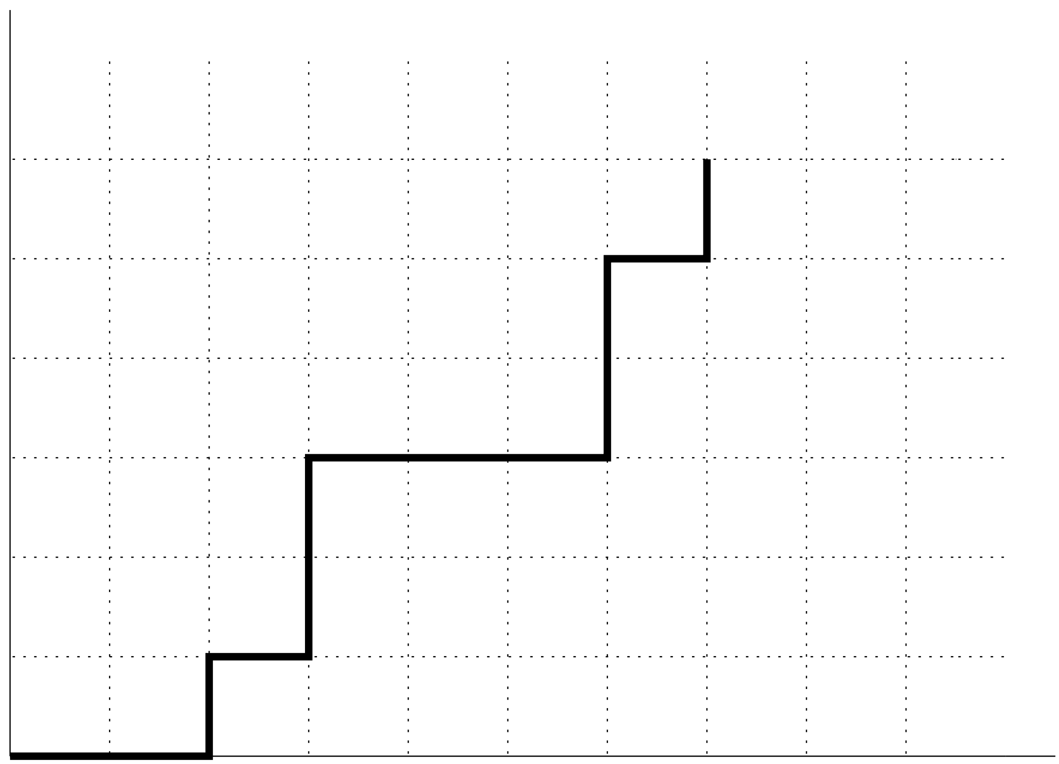
$$\dim SCov_{n,2} = 2^n\, C_n.$$

Correspondance entre éléments de $\mathbb{N}^n$ et chemins

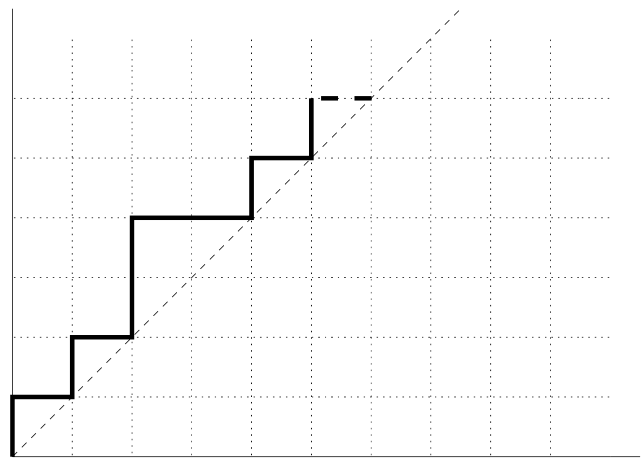
Exemple 7 Pour $n = 6$, on associe à

$$\epsilon = (2, 1, 0, 3, 0, 1)$$

le chemin P_ϵ suivant :

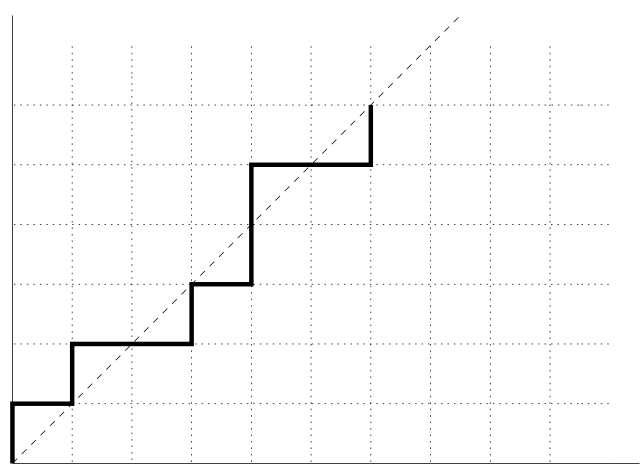


Chemin de Dyck :



$$\epsilon = (0, 1, 1, 0, 2, 1)$$

Chemin transdiagonal :



$$\epsilon = (0, 1, 2, 1, 0, 2)$$

Théorème 5 *L'ensemble de monômes*

$$\{(X_n)^{2\,\eta+\alpha} /\ \eta \ de\ Dyck,\ 0 \le \alpha_i < m\}$$

est une base de $\mathbb{C}[X_n]/\langle QInv^+_{n,m}\rangle$.

Exemple 8 $m = n = 2$

$$\begin{aligned} M_1(X_2^2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ M_{11}(X_2^2) &= x_1^2\, x_2^2 \\ M_2(X_2^2) &= x_1^4 + x_2^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M_2(X_2^2) + M_{11}(X_2^2) - x_1^2\, M_1(X_2^2) \\ = \;& x_1^4 + x_2^4 + x_1^2\, x_2^2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \\ = \;& x_2^4 \end{aligned}$$

Les monômes non divisibles par x_1^2 ou x_2^4 sont

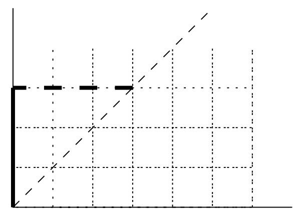
$$1, x_1, x_2, x_1\, x_2, x_2^2, x_1\, x_2^2, x_2^3, x_1\, x_2^3.$$

Exemple 9 $(n = 3)$

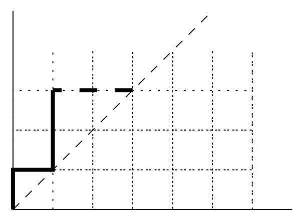
$$\begin{aligned}
F_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\
F_2 &= x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\
&= x_1(x_1 + x_2 + x_3) + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\
&\equiv x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \\
F_{12} &= x_1x_2^2 + x_1x_2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2 \\
&= x_1(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_2x_3^2 \\
&\equiv x_2x_3^2 \\
F_3 &= x_1F_2(x_1, x_2, x_3) + F_3(x_2, x_3) \\
&\equiv x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3 \\
&\equiv x_2(x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2) + x_3^3 \\
&\equiv x_3^3
\end{aligned}$$

Les monômes non divisibles par $\{x_1, x_2^2, x_2 x_3^2, x_3^3\}$ sont :

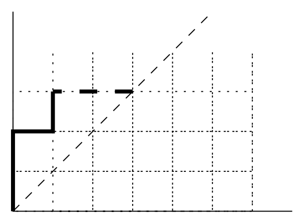
1



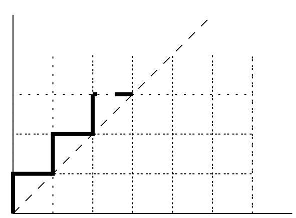
x_2



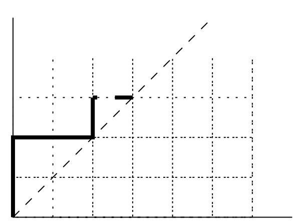
x_3



$x_2 x_3$



x_3^2



Série de Hilbert

$$SCov_{n,m}^{(k)} = SCov_{n,m} \cap \mathbb{C}_k[X_n].$$

Notons $C_n^{(k)}$ le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ et comportant exactement k arches (facteurs),

$$C_n^{(k)} = \frac{k\,(2n-k-1)!}{n!\,(n-k)!}.$$

$$F_{n,m}(t) = \sum \dim SCov_{n,m}^{(k)}\, t^k.$$

Théorème 6

$$F_{n,m}(t) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^{(n-k)}\, t^{m\,k}\right) \left(\frac{1-t^m}{1-t}\right)^n.$$

n	$F_{n,2}(t)$
1	$1+t$
2	$1+2t+2t^2+2t^3+t^4$
3	$1+3t+5t^2+7t^3+8t^4+8t^5+6t^6+2t^7$

$$\sum_n F_{n,m}(t)\,x^n = \frac{(1-t)-\sqrt{(1-t)(1-t-4t^m x(1-t^m))}-2x(1-t^m)}{(1-t)(2t^m-1)-x(1-t^m)}.$$

Théorème 7 (Steinberg)

$$\mathbf{H}_n = \mathcal{L}_\partial[\Delta_n]$$

où

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

et plus généralement :

$$Cov_{n,m} = \mathcal{L}_\partial[\Delta_{n,m}]$$

où

$$\Delta_{n,m} = \begin{vmatrix} x_1^{m-1} & x_1^{2m-1} & \cdots & x_1^{nm-1} \\ x_2^{m-1} & x_2^{2m-1} & \cdots & x_2^{nm-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n^{m-1} & x_n^{2m-1} & \cdots & x_n^{nm-1} \end{vmatrix}$$