ARCHITECTURE DES ORDINATEURS

TD : **07**

# Logique Combinatoire

---

## **Exercice 1 :** Fonctions booléennes de deux variables

Voici toutes les fonctions booléennes de deux variables $x$ et $y$. Donnez pour chacune une interprétation à l'aide des variables $x$, $y$, de TRUE et FALSE, et des opérateurs NOT ($\bar{}$), AND ($\cdot$), OR ($+$), XOR ($\oplus$), NOR, NAND, IMPLY ($\Rightarrow$) et EQUIV ($\Leftrightarrow$).

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## **Exercice 2 :** Étude de fonctions booléennes (1)

Comparez les fonctions booléennes suivantes (en calculant leurs tables de vérité) :

$$f_1 = \bar{a} \cdot b \cdot c$$
$$f_2 = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$$
$$f_3 = \overline{a + \bar{b} + \bar{c}}$$
$$f_4 = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} \cdot \overline{b \cdot c} \cdot \overline{a \cdot b \cdot \bar{c}}$$

Utilisez les lois de De Morgan pour montrer ce résultat.

## **Exercice 3 :** Étude de fonctions booléennes (2)

### Question 1

On considère la fonction définie par la table de vérité suivante :

| $x$ | $y$ | $z$ | $f_1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Exprimez cette fonction de manière naïve sous forme d'expression booléenne en utilisant l'ensemble d'opérateurs suivants : $\mathcal{C}_1 = \{and, or, not\}$, en observant simplement les valeurs 1 du tableau ci-dessus.

Exprimez $f_2 = \overline{f_1}$, donc en observant maintenant les valeurs 0 du tableau ci-dessus, et l'on obtient ainsi une autre expression de $f_1$ en utilisant $\overline{f_2}$.

### Question 2

Question complémentaire (non traitée en TD).

Mêmes questions à partir de la table de vérité suivante :

| $x$ | $y$ | $z$ | $t$ | $f_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

(Seuls les arguments pour lesquels $f$ vaut 1 sont donnés.)

# Pour aller plus loin...

## Exercice 4 : XOR

### Question 1

Quelle relation y a-t-il entre $\bar{a} \oplus b$ et $a \oplus \bar{b}$ ?

### Question 2

Montrez l'associativité de l'opération $\oplus$.

### Question 3

Donnez une interprétation de $a \oplus b \oplus c$ ; de $\bigoplus_{1<i\leq n} a_i$.

## Exercice 5 :

Un ensemble d'opérateurs $\mathcal{C}$ sera dit *complet* si toute fonction peut s'exprimer à partir des opérateurs de $\mathcal{C}$. Les ensembles suivants sont-ils complets ?

— $\mathcal{C}_0 = \{and, or, not\}$;
— $\mathcal{C}_1 = \{or, not\}$;
— $\mathcal{C}_2 = \{and, xor, true\}$;
— $\mathcal{C}_3 = \{nand\}$;
— $\mathcal{C}_4 = \{and, or, true, false\}$;
— $\mathcal{C}_5 = \{imply, not\}$;
— $\mathcal{C}_6 = \{imply, false\}$;
— $\mathcal{C}_7 = \{imply\}$.

Question complémentaire (non traitée en TD).

Même question avec les ensembles suivants

— $\mathcal{C}_8 = \{nor\}$;
— $\mathcal{C}_9 = \{equiv, not\}$;
— $\mathcal{C}_{10} = \{xor, not\}$.

## Exercice 6 :

Montrez que, pour tout $n \geq 1$ les fonctions $n$-aires exprimables à l'aide des opérateurs de $\mathcal{C}_9$ sont les mêmes que celles qui sont exprimables à l'aide des opérateurs de $\mathcal{C}_{10}$.