Université de Bordeaux
Licence STS

ARCHITECTURE DES ORDINATEURS

TD : **07**

Logique Combinatoire

Exercice 1 : Fonctions booléennes de deux variables

Voici toutes les fonctions booléennes de deux variables x et y. Donnez pour chacune une interprétation à l'aide des variables x, y, de TRUE et FALSE, et des opérateurs NOT ($\bar{\ }$), AND ($\cdot$), OR ($+$), XOR ($\oplus$), NOR, NAND, IMPLY ($\Rightarrow$) et EQUIV ($\Leftrightarrow$).

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1

Exercice 2 : Étude de fonctions booléennes (1)

Comparez les fonctions booléennes suivantes (en calculant leurs tables de vérité) :

$$f_1 = \bar{a} \cdot b \cdot c$$
$$f_2 = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c}$$
$$f_3 = \overline{a + \bar{b} + \bar{c}}$$
$$f_4 = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} \cdot \overline{b \cdot c} \cdot \overline{a \cdot b \cdot \bar{c}}$$

Utilisez les lois de De Morgan pour montrer ce résultat.

Exercice 3 : Étude de fonctions booléennes (2)

Question 1

On considère la fonction définie par la table de vérité suivante :

x	y	z	f_1
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Exprimez cette fonction de manière naïve sous forme d'expression booléenne en utilisant l'ensemble d'opérateurs suivants : $\mathcal{C}_1 = \{and, or, not\}$, en observant simplement les valeurs 1 du tableau ci-dessus.

Exprimez $f_2 = \overline{f_1}$, donc en observant maintenant les valeurs 0 du tableau ci-dessus, et l'on obtient ainsi une autre expression de f_1 en utilisant $\overline{f_2}$.

Question 2

Question complémentaire (non traitée en TD).

Mêmes questions à partir de la table de vérité suivante :

x	y	z	t	f_2
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1

(Seuls les arguments pour lesquels f vaut 1 sont donnés.)

Pour aller plus loin...

Exercice 4 : XOR

Question 1

Quelle relation y a-t-il entre $\bar{a} \oplus b$ et $a \oplus \bar{b}$?

Question 2

Montrez l'associativité de l'opération $\oplus$.

Question 3

Donnez une interprétation de $a \oplus b \oplus c$; de $\bigoplus_{1<i\leq n} a_i$.

Exercice 5 :

Un ensemble d'opérateurs $\mathcal{C}$ sera dit *complet* si toute fonction peut s'exprimer à partir des opérateurs de $\mathcal{C}$. Les ensembles suivants sont-ils complets ?

- $\mathcal{C}_0 = \{and, or, not\}$;
- $\mathcal{C}_1 = \{or, not\}$;
- $\mathcal{C}_2 = \{and, xor, true\}$;
- $\mathcal{C}_3 = \{nand\}$;
- $\mathcal{C}_4 = \{and, or, true, false\}$;
- $\mathcal{C}_5 = \{imply, not\}$;
- $\mathcal{C}_6 = \{imply, false\}$;
- $\mathcal{C}_7 = \{imply\}$.

Question complémentaire (non traitée en TD).

Même question avec les ensembles suivants

- $\mathcal{C}_8 = \{nor\}$;
- $\mathcal{C}_9 = \{equiv, not\}$;
- $\mathcal{C}_{10} = \{xor, not\}$.

Exercice 6 :

Montrez que, pour tout $n \geq 1$ les fonctions n-aires exprimables à l'aide des opérateurs de $\mathcal{C}_9$ sont les mêmes que celles qui sont exprimables à l'aide des opérateurs de $\mathcal{C}_{10}$.